Ćw. 19. Wyznaczanie stałej siatki dyfrakcyjnej

Wprowadzenie

Światło jest promieniowaniem elektromagnetycznym o korpuskularno falowym charakterze. Oznacza to, że pewne zjawiska fizyczne można opisać traktując światło jako strumień fotonów inne zaś traktując go jako falę. Naturą falową da się wytłumaczyć odbicie, załamanie, interferencję, polaryzację oraz emisję i pochłanianie.

Fala elektromagnetyczna są to rozchodzące się w przestrzeni periodyczne zmiany pola elektrycznego i magnetycznego. Wektory natężenia pola elektrycznego **E** i indukcji magnetycznej **B** fali elektromagnetycznej są do siebie prostopadłe a ich wartości proporcjonalne. Dlatego przy opisie zjawisk falowych wystarczy wybrać jeden z nich np. **E**. Falę elektromagnetyczną rozchodzącą się wzdłuż osi X możemy opisać za pomocą funkcji falowej:

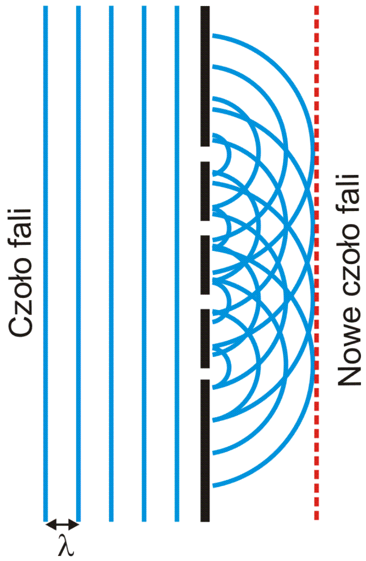
$$E(x,t) = E_0 \sin(\omega t - kx) \tag{1}$$

gdzie:
E_0 - amplituda natężenia pola elektrycznego, (ωt – kx) - faza fali, ω – częstość kołowa, k – liczba falowa związana z długością fali λ zależnością $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Jak wynika ze wzoru (1) przebycie przez falę drogi x = λ powoduje zmianę fazy fali o kąt 2π. Ponieważ 2π jest okresem funkcji sinus to wszystkie punkty, w których fazy będą różniły się o wielokrotność 2π, będą miały takie same wartości natężenia pola elektrycznego **E**. Mówimy wówczas, że drgania natężenia pola w tych punktach są zgodne w fazie. Fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną co oznacza, że wektory natężenia pola elektrycznego i indukcji magnetycznej są zawsze prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali. W przypadku fali opisywanej równaniem (1) będą się one zmieniały tylko wzdłuż osi X – będą natomiast stałe w płaszczyznach YZ prostopadłych do osi X. Wszystkie punkty na danej płaszczyźnie YZ będą miały jednakową fazę. Falę taką nazywamy falą płaską.

Zjawisko interferencji powstaje w wyniku nałożenia się dwóch lub więcej fal w danym punkcie przestrzeni. Obraz interferencyjny możemy zaobserwować wówczas gdy źródła są monochromatyczne (wysyłają fale o jednej długości fali) bądź gdy źródła interferujących fal są spójne (koherentne) – tzn. fale wysyłane przez te źródła zachowują stałą w czasie różnicę faz.
Istota zjawiska dyfrakcji, odkrytego w XVII w. przez Grimaldiego, polega na tym, że fala napotykająca na swojej drodze przeszkodę np. przesłonę, w której znajduje się szczelina, albo ostrą krawędź, ulega ugięciu (dyfrakcji) w całym obszarze za przeszkodą i zmienia kierunek rozchodzenia się. Rozprzestrzenianie się fal za przeszkodą można analizować w oparciu o zasadę Huygensa (Rys.1). Dyfrakcji ulegają fale wszystkich rodzajów, a jej efekty są wyraźne, gdy rozmiary szczeliny są rzędu długości fali. Im węższa jest szczelina, tym silniejsze ugięcie fali, dlatego też nie można uzyskać promienia światła przepuszczając światło przez wąską szczelinę.

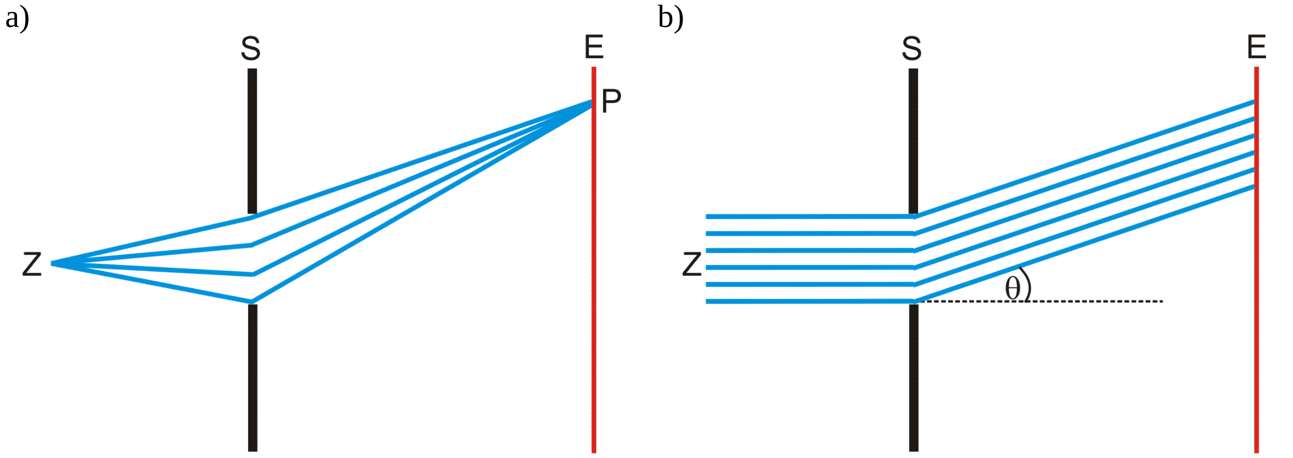
Zasada Huygensa, mówi, że każdy punkt ośrodka, do którego dobiega czoło fali może być traktowany jako źródło fali elementarnej. Utworzona w ten sposób obwiednia fal elementarnych daje nam nową powierzchnię falową. Fala kulista rozchodzi się we wszystkich kierunkach, a obserwowana fala jest złożeniem (superpozycją) wszystkich kulistych fal elementarnych. Punkty w przestrzeni posiadające taką samą fazę tworzą czoło fali – w przypadku fali płaskiej czoło fali stanowi płaszczyznę.



Rys.1 Zasada Huygensa.

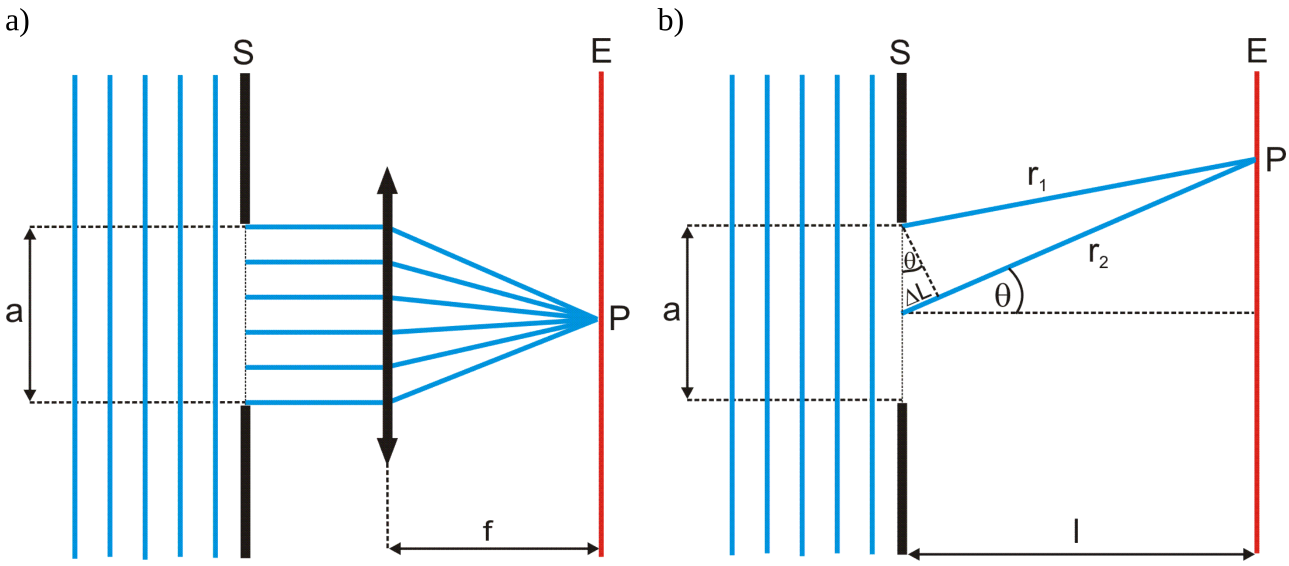
Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie

Fala pochodząca od źródła Z (Rys. 2a) pada na szczelinę S i po przejściu przez nią pada na ekran E. Dodając do siebie wszystkie zaburzenia falowe (wektory **E**) możemy wyznaczyć natężenie fali w punkcie P. Zaburzenia falowe mają różne fazy i amplitudy. Dzieje się tak ponieważ, jak widać z rysunku, punkty w szczelinie są w różnych odległościach od punktu P i światło opuszcza je pod różnymi kątami. Opisana powyżej sytuacja ma miejsce kiedy ekran i źródło fali znajdują się w skończonej odległości od szczeliny S. Taki przypadek nosi nazwę **dyfrakcji Fresnela**. Jeżeli teraz odsuniemy źródło światła i ekran od szczeliny S na dużą odległość (Rys.2b), czoła fal padających i ugiętych dla dowolnych punktów w szczelinie będą płaszczyznami (tzn. promienie będą do siebie równoległe) Ten przypadek nosi nazwę **dyfrakcji Fraunhofera**. Dyfrakcja Fresnela jest dużo ogólniejsza i zawiera wszystkie przypadki łatwiejszej w opisie dyfrakcji Fraunhofera.



Rys.2 Dyfrakcja na szczelinie: Fresnela (a), Fraunhofera (b).

W praktyce falę płaską uzyskamy przez zastosowanie dwóch soczewek. Jednej w celu uzyskania równoległości padającej wiązki, drugiej w celu skupienia na ekranie ugiętych na szczelinie promieni. Taka sytuacja ma miejsce gdy wiązka świetlna jest niekoherentna. Dla wiązki koherentnej wystarczy jedynie druga soczewka. Na rys.3a widzimy płaską falę padającą prostopadle na szczelinę S o szerokości a. (dla przejrzystości szerokość szczeliny jest nieproporcjonalnie duża w stosunku do odległości S-E) Promienie równoległe pokonują takie same drogi optyczne do punktu P. W szczelinie promienie są zgodne w fazie więc równość dróg optycznych narzuca tę zgodność także poza szczeliną. Dlatego w punkcie P powstaje maksimum.



Rys.3 Dyfrakcja na szczelinie.

Rozpatrzmy teraz przypadek, w którym promienie docierające do punktu P wychodzą ze szczeliny pod kątem θ (Rys.3b). Jeden z promieni (r_1) ma swój początek u góry szczeliny, drugi (r_2) w jej środku. Promień r_0 przechodzący przez środek soczewki nie będzie odchylany. Wybierając punkt P w taki sposób, aby różnica dróg optycznych ΔL wynosiła połowę długości fali (λ/2) - promienie zgodne w fazie w szczelinie w punkcie P będą miały fazy przeciwne co prowadzi do ich wygaszenia. Analogicznie promień wychodzący z górnej połowy szczeliny ulegnie wygaszeniu z odpowiednim promieniem z dolnej połowy leżącym w odległości a/2 poniżej. W punkcie P natężenie będzie zerowe – jest to minimum dyfrakcyjne pierwszego rzędu. Opisać to można równaniem:

$$\Delta L = \frac{a}{2}\sin\theta = \frac{\lambda}{2} \tag{2}$$

$$a\sin\theta = \lambda \tag{3}$$

Podobne rozważania możemy przeprowadzić dla innych punktów szczeliny S. Otrzymamy wtedy ogólne wyrażenie dla minimów dyfrakcyjnych:

$$a\sin\theta = m\lambda \quad \text{m=1,2,3,4...} \tag{4}$$

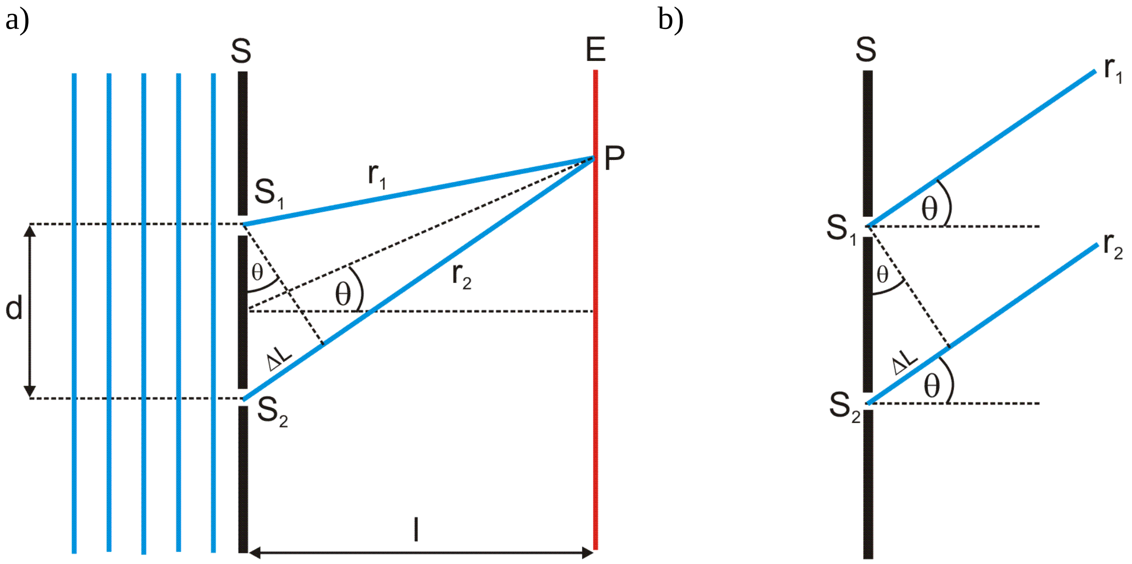
Pośrodku między minimami na ekranie wystąpią maksima dyfrakcyjne. Warunek ten można zapisać jako:

$$a\sin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \text{m=0,1,2,3,4...} \tag{5}$$

Dla m=0 jasny prążek znajduje się pod kątem θ=0, a więc na osi (maksimum centralne)

Dyfrakcja na dwóch szczelinach

Dyfrakcję na dwóch szczelinach opisał Thomas Young. Monochromatyczne światło, przepuszczono przez szczelinę S_0 gdzie uległo ono dyfrakcji. Następnie skierowane zostało na przesłonę z dwiema szczelinami S_1 i S_2 (Rys.4). W wyniku ugięcia światła na tych szczelinach powstają dwie fale koliste, które interferują ze sobą. Na umieszczonym dalej ekranie obserwujemy obraz złożony z jasnych i ciemnych prążków interferencyjnych. Jasne prążki powstają na skutek wzmocnienia interferencyjnego (środki jasnych prążków odpowiadają maksimom interferencji), natomiast ciemne prążki są wynikiem interferencji destruktywnej, czyli wygaszania (środki ciemnych prążków odpowiadają minimom interferencji).



Rys.4 Dyfrakcja na dwóch szczelinach.

W chwili przechodzenia przez szczeliny obie fale świetlne maja tę samą fazę, gdyż są one częściami tej samej fali padającej wychodzącej ze szczeliny S_0. Jednak po przejściu przez szczeliny każda z fal składowych przebywa inną drogę, aby osiągnąć dowolny punkt P na ekranie. Skutkiem tego fale składowe docierające do punktu P mogą mieć różne fazy.

Różnica dróg ΔL przebytych przez fale składowe powoduje różnicę ich faz w punkcie P. Różnica faz fal składowych decyduje o natężeniu światła w punkcie P.

Jeśli różnica dróg jest równa całkowitej wielokrotności długości fali:

$$\Delta L = 0 \pm m\lambda \tag{6}$$

wówczas w takim punkcie fazy fal składowych są zgodne i występuje maksimum interferencyjne, a więc natężenie światła jest maksymalne. Jeśli natomiast różnica dróg spełnia warunek:

$$\Delta L = \lambda / 2 \pm m\lambda \tag{7}$$

wówczas w takim punkcie fazy fal składowych są przeciwne i natężenie światła jest minimalne.

Położenie jasnych i ciemnych prążków na ekranie możemy jednoznacznie określić za pomocą kąta θ względem osi układu. Obliczymy, jakie wartości kąta θ odpowiadają maksimom i minimom interferencyjnym. Obliczenia znacznie upraszczają się, gdy założymy, że odległość ekranu od szczelin jest znacznie większa od odległości pomiędzy obiema szczelinami (l>>d). Wówczas możemy w przybliżeniu traktować promienie r_1 i r_2 jako wzajemnie równoległe, tworzące kąt θ z osią układu (Rys 4b). Przy takich założeniach otrzymujemy związek:

$$\Delta L = d\sin\theta \qquad (8)$$

Porównując równanie (8) z warunkami (6) i (7) otrzymujemy położenie prążków na ekranie. Położenie środka jasnego prążka m-tego rzędu określa równanie

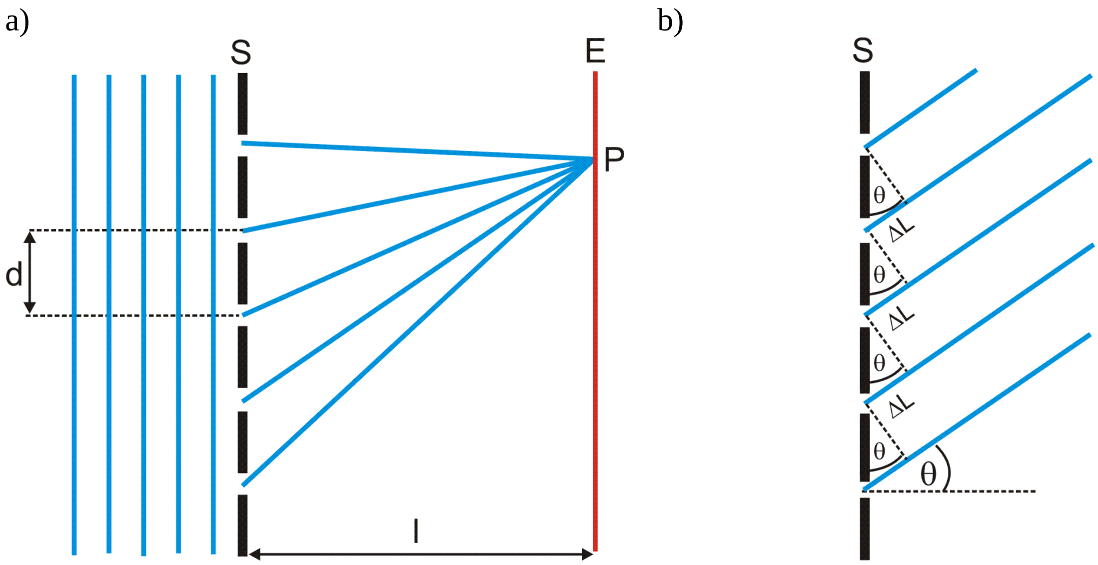
$$d\sin\theta = m\lambda, \text{ gdzie } m = 0, 1, 2 \ldots \qquad (9)$$

np. dla m=0 jasny prążek znajduje się pod kątem θ=0, a więc na osi (maksimum centralne) Położenie środków ciemnych prążków określa warunek

$$d\sin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \; gdzie \; m = 0, 1, 2 \ldots \qquad (10)$$

Siatka dyfrakcyjna

Rozpatrzmy teraz przypadek gdy liczba centrów rozpraszania jest większa tzn. zwiększmy liczbę szczelin z jednej do N. Taki układ bardzo wielu N jednakowych, równoodległych szczelin nazywamy **siatką dyfrakcyjną**. Odległość d środków sąsiednich szczelin nazywamy **stałą siatki**. Oświetlając siatkę dyfrakcyjną światłem monochromatycznym otrzymujemy na ekranie wąskie jasne linie pomiędzy którymi znajdują się szerokie ciemne obszary. Na rysunku 5 przedstawiono uproszczoną siatkę dyfrakcyjną, złożoną z 5 równoodległych szczelin. Do wyznaczenia położeń jasnych linii na ekranie wykorzystamy tę samą procedurę co w przypadku doświadczenia Younga. Zakładamy więc, że ekran E znajduje się dostatecznie daleko od siatki (l>>d), tak że promienie wychodzące ze szczelin można traktować jako równolegle.



Rys.5 Siatka dyfrakcyjna.

Dla każdej pary promieni wychodzących z sąsiednich szczelin obserwujemy wzmocnienie, gdy różnica ich dróg jest równa całkowitej wielokrotności długości fali, a więc

$$\Delta L = d\sin\theta = m\lambda, \text{ gdzie } m = 0, 1, 2 \ldots \qquad (11)$$

Czyli położenie linii określa warunek:

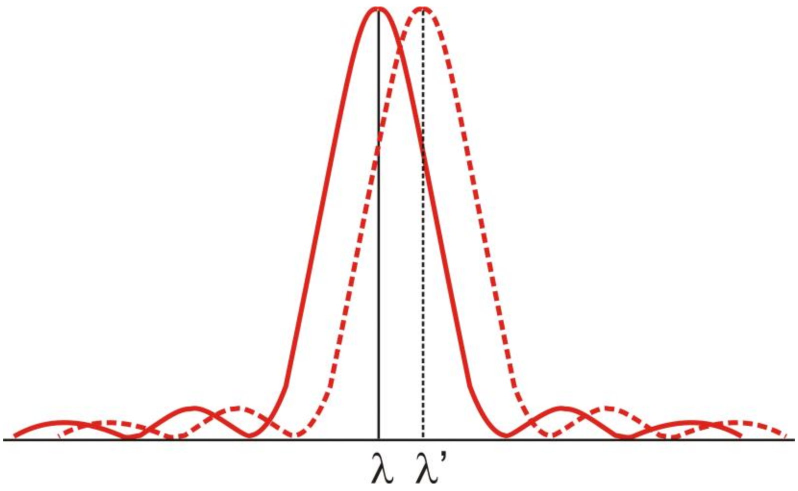
$$\sin\theta = m\lambda / d, \text{ gdzie } m = 0, 1, 2 \ldots \qquad (12)$$

Liczby m nazywamy **rzędem linii**. Linia zerowego rzędu (m=0), linia pierwszego rzędu (m=1) itd.

W przypadku siatki dyfrakcyjnej linie są bardzo wąskie, ponieważ powstają w wyniku interferencji bardzo dużej liczby fal składowych. Ze względu na małą wartość stałych siatki odległości kątowe pomiędzy poszczególnymi liniami są znacznie większe niż w doświadczeniu Younga z 2 szczelinami. Ze wzoru (11) wynika, że dla danej siatki położenie kątowe każdej linii zależy od długości fali światła padającego. Dlatego też, jeśli na siatkę pada światło o nieznanej długości fali, to pomiar kątów θ dla linii wyższych rzędów powala wyznaczyć długość fali tego światła. Jeśli światło padające zawiera kilka różnych długości fali, linie odpowiadające różnym długościom fali mogą być na tyle dobrze rozseparowane, że można je rozróżnić i zidentyfikować. Należy tu wprowadzić pojęcie **zdolności rozdzielczej siatki dyfrakcyjnej (R)**, czyli jej zdolność do rozdzielania linii o różnych długościach fali, którą definiujemy jako:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \tag{13}$$

gdzie: λ –jedna z długości fali dwu linii widmowych, Δλ = λ’- λ - różnica długości fal między nimi.



Rys.6 Kryterium Rayleigha.

Warunkiem rozdzielania dwóch fal o bliskich sobie długościach jest tzw. **Kryterium Rayleigha**, które mówi, że aby dwa maksima główne były rozróżnialne, odległość kątowa powinna być taka, aby minimum jednej linii przypadało w maksimum drugiej linii (Rys.6). Pierwsze minimum dyfrakcyjne wypada w odległości φ = (2π/N) od maksimum głównego. φ- oznacza różnicę faz dwóch fal wysyłanych z sąsiednich szczelin siatki dyfrakcyjnej. Taka różnica faz odpowiada różnicy długości dróg optycznych (λ/N). A więc warunek na pierwsze minimum dla widma rzędu m-tego możemy zapisać:

$$d \sin\theta = m\lambda + \frac{\lambda}{N} \tag{14}$$

Równocześnie dla fali o długości λ’ musimy otrzymać w tym miejscu maksimum natężenia, czyli:.

$$d \sin\theta = m\lambda' \tag{15}$$

Po odjęciu równań stronami i stronami przekształceniu otrzymamy:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \tag{16}$$

gdzie m-rząd widma, N-liczba szczelin siatki

Zdolność rozdzielcza siatki dyfrakcyjnej jest tym większa, im więcej biorących udział w interferencji szczelin zawiera siatka i im wyższy jest rząd widma.

Na obraz interferencyjny ma także wpływ szerokości pojedynczej szczeliny Obliczymy teraz szerokość linii centralnej. W tym celu poszukamy położenia pierwszego minimum, w którym N promieni wychodzących ze szczelin wygasza się całkowicie. Pierwsze minimum powstaje w miejscu, gdzie różnica dróg między skrajnymi promieniami jest równa λ (wtedy skrajny dolny promień oraz promień środkowy wygaszają się, podobnie wygaszają się kolejne pary wyższych promieni). Dla siatki składającej się z N szczelin odległych od siebie o d pierwsze minimum powstaje w miejscu, gdzie spełniony jest warunek:

$$\Delta L = Nd \sin \Delta\theta_{1/2} = \lambda \tag{17}$$

A więc szerokość połówkowa linii centralnej wynosi:

$$\Delta\theta_{1/2} \approx \sin \Delta\theta_{1/2} = \lambda /(Nd) \tag{18}$$

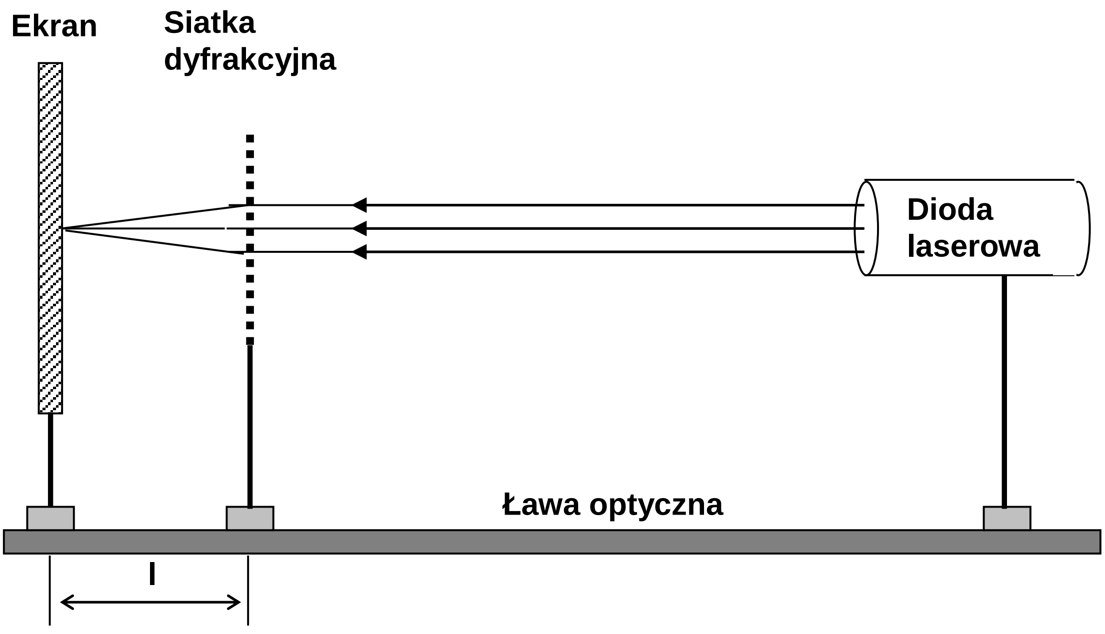
Ponieważ $\Delta\theta_{1/2}$ jest bardzo małe to $\Delta\theta_{1/2} \approx \sin \Delta\theta_{1/2}$. Całkowita szerokość linii jest równa $2\Delta\theta_{1/2}$. Szerokość połówkowa linii wyższego rzędu zależy także od jej położenia kątowego i wynosi

$$\Delta\theta_{1/2} = \lambda /(Nd \cos \theta) \tag{19}$$

Jak widać, dla danej długości fali λ i zadanej stałej siatki d szerokość linii maleje wraz ze wzrostem liczby szczelin N. Zatem siatka o większej liczbie szczelin, wytwarzająca węższe (a więc słabiej nakładające się) linie będzie lepiej rozdzielała linie różniące się długością fali, zatem będzie miała większą zdolność rozdzielczą.

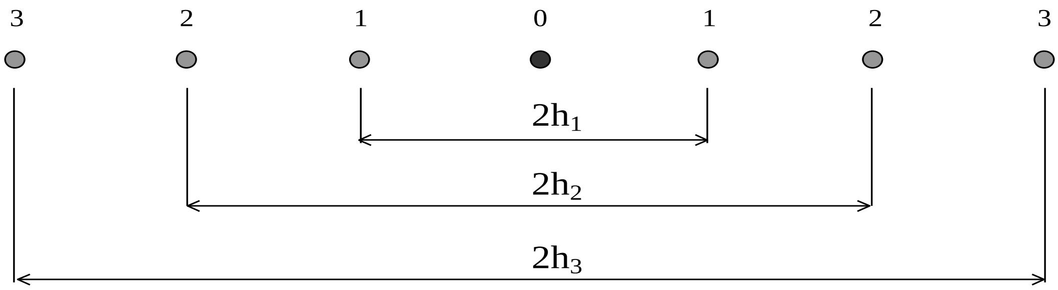
Wykonanie ćwiczenia

1. Zestawić układ pomiarowy zgodnie z rysunkiem 7.



Rys. 7. Schemat układu pomiarowego.

1. Dobrać odległość l pomiędzy ekranem E a układem SD tak, aby obraz prążków interferencyjnych na ekranie był ostry (Rys. 8). Pomiar wykonać dla różnych wartości l.



Rys. 8. Widok obrazu interferencyjnego.

2. W celu zmniejszenia błędu pomiaru **h_m**, należy odczytać odległości pomiędzy środkami prążków np. pierwszego rzędu i podzielić przez dwa. Analogicznie postępujemy odczytując odległości dla prążków wyższych rzędów.

3. Wyniki pomiarów dla danego rzędu widma wpisać do poniższej tabeli:

<table>
<tr><th>λ</th><th>m</th><th>l.p.</th><th>l</th><th>h_m</th><th>d</th><th>$\overline{d}$</th></tr>
<tr><td rowspan="18"></td><td rowspan="6">1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="18"></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">2</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">3</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

4. Stałą siatki dyfrakcyjnej d wyliczyć ze wzoru:

$$d = m \frac{\sqrt{l^2 + h_m^2}}{h_m} \lambda \tag{20}$$

gdzie: m – rząd widma, λ - długość fali światła laserowego

Niepewność pomiarowa

Niepewność pomiarową względną maksymalną otrzymanych wartości **d** obliczamy metodą różniczkowania uwzględniając, że **d** $=f(h_m, l)$.

Obowiązujące zagadnienia teoretyczne

1. Światło jako fala elektromagnetyczna.
2. Zjawisko dyfrakcji i interferencji światła, doświadczenie Younga.
3. Światło monochromatyczne, światło białe, spójność fali.
4. Własności i powstawanie światła laserowego.
5. Siatka dyfrakcyjna.
6. Filtry optyczne.

Literatura

1. Podstawy Fizyki – D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, PWN 2003, tom 4.
2. Fizyka-krótki kurs – Cz. Bobrowski, PWN 1999.
3. Wykłady z fizyki – I.W. Sawieliew, PWN Warszawa 1998, tom 2.

Opiekun ćwiczenia: dr Adam Prószyński