

Ćw. 4. Wyznaczanie modułu Younga z ugięcia

Wprowadzenie

Ze względu na budowę struktury cząsteczkowej, ciała stałe możemy podzielić na amorficzne oraz krystaliczne. Ciała amorficzne zwane bezpostaciowymi (np. szkła czy żywice) posiadają atomy rozmieszczone w sposób nieuporządkowany (przypadkowy), natomiast ciała krystaliczne charakteryzują się uporządkowaną strukturą tworzącą regularną sieć atomów lub cząsteczek.

Ciała stałe są w większości ciałami polikrystalicznymi tzn. stanowią zbiór połączonych ze sobą kryształitów czyli małych ziaren o budowie krystalicznej zorientowanych względem siebie przypadkowo i mających różne kształty.

Atomy tworzące sieć krystaliczną pozostają w równowadze w wyniku wzajemnej kompensacji sił przyciągania i odpychania. Pod wpływem działania zewnętrznej siły odkształcającej następuje zmiana położenia atomów. Prowadzi to do naruszenia równowagi pomiędzy siłami wzajemnego oddziaływania i w związku z tym w strukturze sieci pojawiają się wewnętrzne siły sprężystości przeciwdziałające siłom zewnętrznym. Jeżeli po ustaniu zewnętrznej siły odkształcającej sieć krystaliczna powraca do pierwotnego kształtu, to odkształcenie takie nazywamy sprężystym (elastycznym). Jeżeli siła odkształcająca przekroczy pewną wartość krytyczną, następuje trwałe odkształcenie kryształu. Deformacja sieci krystalicznej jest wówczas tak duża, że atomy zajmują nowe trwałe położenia, w których następuje ponowna równowaga sił odpychania i przyciągania. Odkształcenie materiału poddanego takim dużym, krytycznym siłom nazywamy odkształceniem trwałym (plastycznym). Dalsze zwiększanie wartości oraz czasu trwania siły może spowodować nieodwracalne zerwanie wiązań między molekułami czyli rozerwanie (zniszczenie) materiału.

Z punktu widzenia właściwości mechanicznych możemy podzielić materiały na kruche i plastyczne. Materiały kruche ulegają zniszczeniu przy bardzo niewielkich odkształceniach. Materiały plastyczne ulegają zniszczeniu przy znacznych odkształceniach. Do pierwszej kategorii materiałów można zaliczyć przykładowo: żeliwo, kamień, szkło, gips. Do drugiej kategorii zaliczamy np. miedź, złoto, stal niskowęglową. Podział na ciała kruche i plastyczne jest względny, gdyż istnieją materiały, które w wysokiej temperaturze i przy wolno działającej sile są plastyczne, a stają się kruche w miarę obniżania temperatury i przy szybko działającej sile.

Ze względu na zmianę geometrii ciał wprowadzamy pojęcia *odkształcenia postaciowego*, w którego trakcie zmienia się jedynie kształt ciała i *odkształcenia objętościowego*, kiedy to zmienia się objętość ciała bez zmiany kształtu. W rzeczywistych procesach zachodzą na ogół obydwa odkształcenia jednocześnie.

W końcu XVII w. angielski fizyk Robert Hooke na drodze doświadczeń, odkrył prawo opisujące zjawisko występujące w ciele odkształcanym sprężystości. Hooke stwierdził, że siła oporu sprężystego rośnie liniowo wraz z odkształceniem. Ilościowo tę zależność wyraża się równaniem:

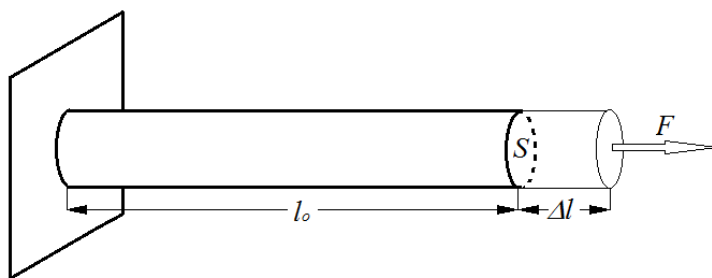
$$\varepsilon_x = k \cdot \sigma, \quad (1)$$

gdzie: ε_x – odkształcenie względne dla określonego kierunku, k – współczynnik proporcjonalności zależny od sposobu odkształcania i rodzaju ciała stałego, σ - ciśnienie zwane inaczej naprężeniem wewnętrznym.

Odształcenia osiągamy przez: rozciąganie, ściskanie, zginanie, skręcanie i ścinanie. W odkształconym ciele stałym powstają siły wewnętrzne przeciwdziałające siłom zewnętrznym powodującym odkształcenie. Przy ścisaniu ujawniają się siły wzajemnego odpychania cząsteczek, a przy rozciąganiu – siły przyciągania. Te siły wewnętrzne F_w , przypadające na jednostkę powierzchni S pola przekroju prostopadłego do ich kierunku działania są naprężeniem wewnętrznym σ .

$$\sigma = \frac{F_w}{S} \left[\frac{N}{m^2} \right]. \quad (2)$$

Dla dobrego zobrazowania prawa Hooke'a rozważymy najprostszy przypadek, czyli rozciąganie ciała stałego (np. pręta) z rysunku 1.



Rys. 1. Wydłużenie pręta pod wpływem siły rozciągającej.

Jeżeli l_0 jest długością początkową pręta, Δl - przyrostem długości pręta, F - siłą powodującą wydłużenie a S - polem przekroju poprzecznego pręta oraz wiedząc, że zgodnie z prawem akcji i reakcji $F_w = F$ to na podstawie zależności (1) oraz (2), prawo Hooke'a możemy zapisać

$$\frac{\Delta l}{l_0} = k \cdot \frac{F}{S}, \quad (3)$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności dla danego materiału a $\frac{\Delta l}{l_0}$ stanowi względny

przyrost długości, zwany także wydłużeniem względnym ε . Dla rozważanego przypadku możemy napisać prawo Hooke'a w postaci wzoru na naprężenie wewnętrzne σ .

$$\sigma = \frac{1}{k} \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \quad (4)$$

Jeżeli przyjmiemy, że $E = \frac{1}{k}$, to ostatecznie możemy zapisać:

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (5)$$

gdzie E jest współczynnikiem proporcjonalności, zwanym modułem Younga, Sens fizyczny modułu Younga określimy łatwo na podstawie wzoru (5), z którego wynika, że jeżeli $\Delta l = l_0$, to $E = \sigma$. Stąd wynika sformułowanie, że **Moduł Younga** jest wielkością charakterystyczną dla danej substancji i jest równy naprężeniu, przy którym następuje podwojenie długości ciała. Na ogół podwojenie długości ciał nie udaje się, ponieważ zwykle zanim to nastąpi, ciało ulega rozerwaniu.

Wymiarem modułu Younga, zwanym także modułem sprężystości, jest $\frac{N}{m^2}$. Moduł Younga

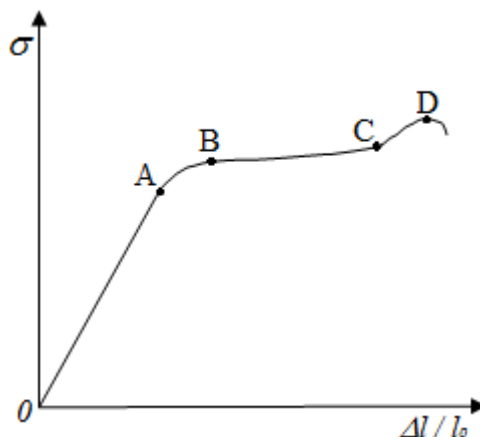
używany jest do określenia właściwości sprężystych ciał, a jego wielkość określa wytrzymałość materiału na różne czynniki mechaniczne.

Podczas rozciągania ciała zmniejsza się jego pole przekroju poprzecznego (nie uwzględnione na rysunku 1), mierzone w kierunku prostopadłym do kierunku działania siły; mówimy, że następuje

przewężenie ciała. Stosunek względnego przewężenia do względnego wydłużenia nosi nazwę **współczynnika Poissona** i jest wielkością charakterystyczną dla danego materiału. Np. dla pręta o przekroju kołowym o promieniu r i długości l współczynnik Poissona μ wyrażamy:

$$\mu = \frac{\Delta r}{r} : \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta r}{r} \cdot \frac{l}{\Delta l}, \quad (6)$$

gdzie Δl jest bezwzględnym przyrostem długości a Δr bezwzględnym zmniejszeniem promienia.

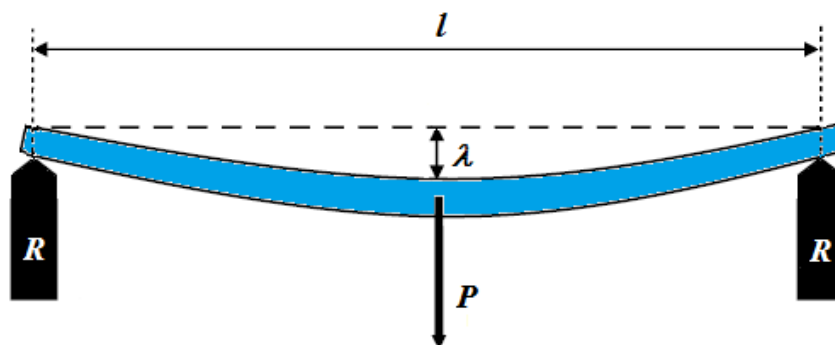


Rys. 2. Naprężenie wewnętrzne jako funkcja względnego przyrostu długości rozciąganego ciała.

Wykres naprężenia wewnętrznego jako funkcji wydłużenia względnego rozciąganego drutu lub pręta przedstawia rys. 2. Przedział $0 - A$ na wykresie jest zakresem sprężystości, w którym ze względu na liniowy charakter stosuje się prawo Hooke'a. Punkt B oznacza koniec zakresu sprężystości. Przedział $B - C$ jest zakresem plastyczności materiału. Punkt D stanowi granicę wytrzymałości materiału, której przekroczenie powoduje rozerwanie drutu czy pręta. Materiały o stosunkowo dużym przedziale $0 - B$ nazywamy materiałami sprężystymi (np. stal, guma). Dla niektórych materiałów najdłuższa część wykresu zawiera się pomiędzy punktami $B - C$. Takie materiały nazywamy plastycznymi (np. ołów, cyna). Materiały mające bardzo mały zakres sprężystości i plastyczności nazywamy kruchymi (np. żeliwo, beton).

Metoda pomiaru

Do pomiaru modułu Younga prętów grubych można posłużyć się metodą ugięcia pręta podpartego z obydwu stron (rys. 3). Ugięcie powstaje pod wpływem siły P prostopadłej do pręta i przyłożonej w środkowej części pręta tj. w odległości $l/2$ od punktu podparcia.



Rys. 3. Ugięcie siłą P pręta obustronnie podpartego.

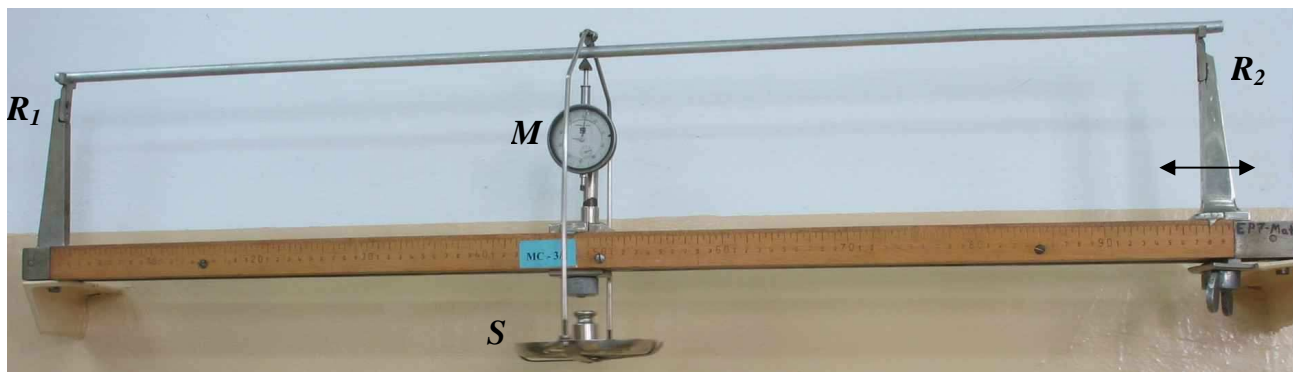
Zachodzi wówczas zjawisko równoczesnego ściskania górnej i rozciągania dolnej, czyli przeciwnych powierzchni ciała. Środkowa warstwa (znajdująca się pomiędzy górną a dolną powierzchnią) jest neutralna i nie podlega ani ściskaniu ani rozciąganiu. Zarówno ściskanie jak i rozciąganie zachodzi w granicy odkształceń sprężystych, dla których ma zastosowanie prawo Hooke'a. Miarą odkształcenia jest strzałka ugięcia λ . Tą metodą moduł Younga E możemy wyznaczyć stosując zależności (7) gdzie dla prętów o przekroju prostokątnym stosujemy wzór (a), natomiast dla prętów o przekroju okrągłym stosujemy wzór (b).

$$(a) \quad E = \frac{P \cdot l^3}{4 \cdot \lambda \cdot a \cdot b^3}, \quad (b) \quad E = \frac{4 \cdot P \cdot l^3}{3 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot d^4} \quad (7)$$

Oznaczenia występujące we wzorach: P – siła uginająca pręt (ciężar szalki z obciążnikami), l – długość pręta, czyli odległość między podporami (pryzmatami) R , λ - strzałka ugięcia, a i b – odpowiednio szerokość i wysokość prostokąta będącego przekrojem pręta, d – średnica pręta o przekroju okrągłym.

Wykonanie ćwiczenia

1. Dokonać pomiarów wymiarów poprzecznych śrubą mikrometryczną badanej próbki (pręta): a) Dla pręta o przekroju prostokątnym boków a i b np. co 5 cm wzdłuż boku a i wzdłuż boku b . b) Dla pręta o przekroju kołowym np. 15 – 20 pomiarów średnicy w różnych miejscach dla kierunków wzajemnie prostopadłych. Jako wyniki końcowe przyjąć średnie arytmetyczne ($a_{sr.}$, $b_{sr.}$, $r_{sr.}$).



Rys. 4. Fotografia przedstawiająca stanowisko pomiarowe. Oznaczenia: M – mikromierz, S – szalka, R_1 – stalowy pryzmat, R_2 – stalowy pryzmat o regulowanym położeniu.

2. Położyć pręt na stalowych pryzmatach R_1 i R_2 (rys. 4) umieszczonych na liniale z podziałką milimetrową. Odległość między pryzmatami, będąca długością l , podaje prowadzący ćwiczenia.
3. W środkowej części między pryzmatami umieścić na liniale mikromierz M tak by lekko dotykał pręta.
4. Na środku pręta zawiesić szalkę S o ciężarze P_0 .
5. Nakładając na szalkę odważniki o ciężarze P_i (ilość i wartość obciążeń ustala prowadzący ćwiczenia) odczytywać wskazania mikromierza. Przy odczycie strzałki ugięcia λ uwzględniać ciężar szalki P_0 . przyjmując $P_i = P_0 + m_i \cdot g$, gdzie $m_i \cdot g$ jest ciężarem odważników. Przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Odczytów dokonywać także przy zmniejszonym obciążeniu.
6. Sporządzić wykres ciężaru P w funkcji strzałki ugięcia λ tj. $P = f(\lambda)$.
7. Obliczenia końcowej wartości modułu sprężystości E dokonać jedną z dwu metod (wyboru dokonuje prowadzący ćwiczenia):

- a. Opierając się na sporządzonym wykresie poprzez zastosowanie metody najmniejszych kwadratów otrzymujemy prostą $P = A \cdot \lambda$. Dla prostoliniowego odcinka zależności $P = f(\lambda)$ ze wzorów (8) (będących przekształceniem wzorów (7)):

$$(a) \quad P = E \cdot \frac{4 \cdot a \cdot b^3}{l^3} \cdot \lambda, \quad (b) \quad P = E \cdot \frac{3 \cdot \pi \cdot d^4}{4 \cdot l^3} \cdot \lambda, \quad (8)$$

wyliczamy współczynnik kierunkowy prostej A . Współczynnik A we wzorach (8) wynosi odpowiednio:

$$(a) \quad A = E \cdot \frac{4 \cdot a \cdot b^3}{l^3}, \quad (b) \quad A = E \cdot \frac{3 \cdot \pi \cdot d^4}{4 \cdot l^3}, \quad (9)$$

Przekształcając wzory (9) wyliczamy moduł Younga E , który wyliczamy stosując wzór (10a) dla pręta o przekroju prostokątnym oraz wzór (10b) dla pręta o przekroju okrągłym.

$$(a) \quad E = \frac{A \cdot l^3}{4 \cdot a \cdot b^3}, \quad (b) \quad E = \frac{4 \cdot A \cdot l^3}{3 \cdot \pi \cdot d^4}. \quad (10)$$

- b. Obliczając moduły Younga dla poszczególnych obciążeń i jako wynik końcowy przyjmując średnie arytmetyczne wyliczone dla pomiarów przy zwiększonym obciążeniu oraz dla pomiarów przy zmniejszonym obciążeniu. Poszczególnych obliczeń dokonujemy na podstawie wzorów (7ab) odpowiednio: (a) – dla pręta o przekroju prostokątnym lub (b) – dla pręta o przekroju kołowym.
8. Maksymalną niepewność pomiaru modułu sprężystości E można obliczyć: W metodzie a) za pomocą różniczkowania wzoru (10a) lub (10b) obliczając ΔA z metody najmniejszych kwadratów. W metodzie b) przy zastosowaniu różniczkowania wzorów (7a) lub (7b) dla wybranego pomiaru leżącego najbliżej prostej. Do wyznaczenia niepewności pomiarowych mierzonych bezpośrednio przyjmujemy: Δa , Δb i Δd - największe odchylenia od wartości średniej plus niepewność odczytu na skali śruby mikrometrycznej, $\Delta \lambda$ - podwójna wartość niepewności odczytu z podziałki mikromierza, Δl - niepewność odczytu długości pręta (odległości między pryzmatami R).

Wartości podana

ciężar szalki: $P_0 = 1,5818 \text{ N}$.

Tabela pomiarowa 1. Pomiary szerokości a i wysokości b dla prętów o przekroju prostokątnym.

nr pomiaru	1	2	3	...	wartości średnie	
					a_{sr} [mm]	
a [mm]						
b [mm]					b_{sr} [mm]	

Tabela pomiarowa 2. Wyznaczanie modułu Younga E dla prętów o przekroju prostokątnym.

seria	nr pom.	$P_i = P_0 + m_i \cdot g$ [N]	λ [mm]	l [m]	$a_{\dot{s}r}$ [mm]	$b_{\dot{s}r}$ [mm]	E [N/m ²]	$E_{\dot{s}red}$ [N/m ²]
zwiększanie obciążenia	1							
	2							
	3							
		⋮	⋮					
zmniejszanie obciążenia	1							
	2							
	3							
		⋮	⋮					

Tabela pomiarowa 3. Pomiar średnicy dla prętów okrągłych.

nr pomiaru	1	2	3	...	wartość średnia
d [mm]					$d_{\dot{s}r}$ [mm]

Tabela pomiarowa 4. Wyznaczanie modułu Younga E dla prętów o przekroju okrągłym.

seria	nr pom.	$P_i = P_0 + m_i \cdot g$ [N]	λ [mm]	l [m]	$r_{\dot{s}r}$ [mm]	E [N/m ²]	$E_{\dot{s}r}$ [N/m ²]
zwiększanie obciążenia	1						
	2						
	3						
		⋮	⋮				
zmniejszanie obciążenia	1						
	2						
	3						
		⋮	⋮				

Zagadnienia do kolokwium:

1. Rodzaje ciał stałych.
2. Rodzaje odkształceń.
3. Pojęcie odkształcenia względnego i naprężenia.
4. Prawo Hooke'a.
5. Zależność odkształcenia względnego w funkcji naprężenia.
6. Wyznaczanie modułu Younga z ugięcia.

Bibliografia:

1. Massalski J., Massalska M., *Fizyka dla inżynierów*. WN-T, Warszawa, 2008, tom 1.
2. Halliday D., Resnick R., Walker J., *Podstawy fizyki*, PWN, Warszawa 2003, tom 2.
3. Szydłowski H., *Pracownia fizyczna*. PWN, Warszawa, 1994.