

C-4. Wyznaczanie modułu Younga z ugięcia

Wprowadzenie

Ze względu na budowę struktury cząsteczkowej, ciała stałe możemy podzielić na amorficzne oraz krystaliczne. Ciała amorficzne zwane bezpostaciowymi (np. szkła czy żywice) posiadają atomy rozmieszczone w sposób nieuporządkowany (przypadkowy), natomiast ciała krystaliczne charakteryzują się uporządkowaną strukturą tworzącą regularną sieć atomów lub cząsteczek.

Ciała stałe są w większości ciałami polikrystalicznymi tzn. stanowią zbiór połączonych ze sobą kryształitów czyli małych ziaren o budowie krystalicznej zorientowanych względem siebie przypadkowo i mających różne kształty.

Atomy tworzące sieć krystaliczną pozostają w równowadze w wyniku wzajemnej kompensacji sił przyciągania i odpychania. Pod wpływem działania zewnętrznej siły odkształcającej następuje zmiana położenia atomów. Prowadzi to do naruszenia równowagi pomiędzy siłami wzajemnego oddziaływania i w związku z tym w strukturze sieci pojawiają się wewnętrzne siły sprężystości przeciwdziałające siłom zewnętrznym. Jeżeli po ustaniu zewnętrznej siły odkształcającej sieć krystaliczna powraca do pierwotnego kształtu, to odkształcenie takie nazywamy sprężystym (elastycznym). Jeżeli siła odkształcająca przekroczy pewną wartość krytyczną, następuje trwałe odkształcenie kryształu. Deformacja sieci krystalicznej jest wówczas tak duża, że atomy zajmują nowe trwałe położenia, w których następuje ponowna równowaga sił odpychania i przyciągania. Odkształcenie materiału poddanego takim dużym, krytycznym siłom nazywamy odkształceniem trwałym (plastycznym). Dalsze zwiększanie wartości oraz czasu trwania siły może spowodować nieodwracalne zerwanie wiązań między molekułami czyli rozerwanie (zniszczenie) materiału.

Z punktu widzenia właściwości mechanicznych możemy podzielić materiały na kruche i plastyczne. Materiały kruche ulegają zniszczeniu przy bardzo niewielkich odkształceniach. Materiały plastyczne ulegają zniszczeniu przy znacznych odkształceniach. Do pierwszej kategorii materiałów można zaliczyć przykładowo: żeliwo, kamień, szkło, gips. Do drugiej kategorii zaliczamy np. miedź, złoto, stal niskowęglową. Podział na ciała kruche i plastyczne jest względny, gdyż istnieją materiały, które w wysokiej temperaturze i przy wolno działającej sile są plastyczne, a stają się kruche w miarę obniżania temperatury i przy szybko działającej sile.

Ze względu na zmianę geometrii ciał wprowadzamy pojęcia *odkształcenia postaciowego*, w którego trakcie zmienia się jedynie kształt ciała i *odkształcenia objętościowego*, kiedy to zmienia się objętość ciała bez zmiany kształtu. W rzeczywistych procesach zachodzą na ogół obydwa odkształcenia jednocześnie.

W końcu XVII w. angielski fizyk Robert Hooke na drodze doświadczeń, odkrył prawo opisujące zjawisko występujące w ciele odkształcanym sprężystości. Hooke stwierdził, że siła oporu sprężystego rośnie liniowo wraz z odkształceniem. Ilościowo tę zależność wyraża się równaniem:

$$\varepsilon_x = k \cdot \sigma, \quad (1)$$

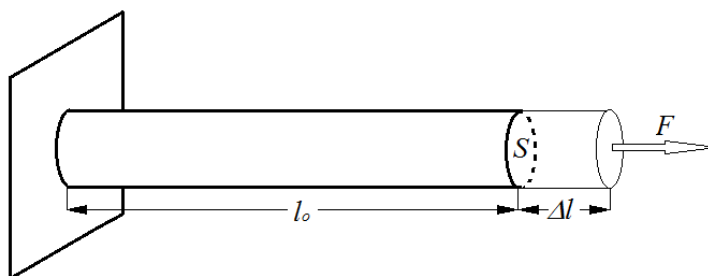
gdzie: ε_x – odkształcenie względne dla określonego kierunku, k – współczynnik proporcjonalności zależny od sposobu odkształcania i rodzaju ciała stałego, σ - ciśnienie zwane inaczej naprężeniem wewnętrznym.

Odkształcenia osiągamy przez: rozciąganie, ściskanie, zginanie, skręcanie i ścinanie. W odkształconym ciele stałym powstają siły wewnętrzne przeciwdziałające siłom zewnętrznym

powodującym odkształcenie. Przy ściskaniu ujawniają się siły wzajemnego odpychania cząsteczek, a przy rozciąganiu – siły przyciągania. Te siły wewnętrzne F_w , przypadające na jednostkę powierzchni S pola przekroju prostopadłego do ich kierunku działania są naprężeniem wewnętrznym σ .

$$\sigma = \frac{F_w}{S} \left[\frac{N}{m^2} \right]. \quad (2)$$

Dla dobrego zobrazowania prawa Hooke'a rozważymy najprostszy przypadek, czyli rozciąganie ciała stałego (np. pręta) z rysunku 1.



Rys. 1. Wydłużenie pręta pod wpływem siły rozciągającej.

Jeżeli l_0 jest długością początkową pręta, Δl - przyrostem długości pręta, F - siłą powodującą wydłużenie a S - polem przekroju poprzecznego pręta oraz wiedząc, że zgodnie z prawem akcji i reakcji $F_w = F$ to na podstawie zależności (1) oraz (2), prawo Hooke'a możemy zapisać

$$\frac{\Delta l}{l_0} = k \cdot \frac{F}{S}, \quad (3)$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności dla danego materiału a $\frac{\Delta l}{l_0}$ stanowi względny

przyrost długości, zwany także wydłużeniem względnym ε . Dla rozważanego przypadku możemy napisać prawo Hooke'a w postaci wzoru na naprężenie wewnętrzne σ .

$$\sigma = \frac{1}{k} \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \quad (4)$$

Jeżeli przyjmiemy, że $E = \frac{1}{k}$, to ostatecznie możemy zapisać:

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (5)$$

gdzie E jest współczynnikiem proporcjonalności, zwanym modułem Younga, Sens fizyczny modułu Younga określimy łatwo na podstawie wzoru (5), z którego wynika, że jeżeli $\Delta l = l_0$, to $E = \sigma$. Stąd wynika sformułowanie, że **Moduł Younga** jest wielkością charakterystyczną dla danej substancji i jest równy naprężeniu, przy którym następuje podwojenie długości ciała. Na ogół podwojenie długości ciał nie udaje się, ponieważ zwykle zanim to nastąpi, ciało ulega rozerwaniu.

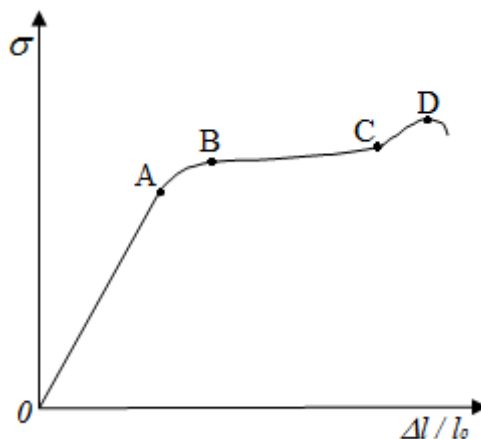
Wymiarem modułu Younga, zwanym także modułem sprężystości, jest $\frac{N}{m^2}$. Moduł Younga używany jest do określenia właściwości sprężystych ciał, a jego wielkość określa wytrzymałość materiału na różne czynniki mechaniczne.

Podczas rozciągania ciała zmniejsza się jego pole przekroju poprzecznego (nie uwzględnione na rysunku 1), mierzone w kierunku prostopadłym do kierunku działania siły; mówimy, że następuje przewężenie ciała. Stosunek względnego przewężenia do względnego wydłużenia nosi nazwę

współczynnika Poissona i jest wielkością charakterystyczną dla danego materiału. Np. dla pręta o przekroju kołowym o promieniu r i długości l współczynnik Poissona μ wyrażamy:

$$\mu = \frac{\Delta r}{r} : \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta r}{r} \cdot \frac{l}{\Delta l}, \quad (6)$$

gdzie Δl jest bezwzględnym przyrostem długości a Δr bezwzględnym zmniejszeniem promienia.

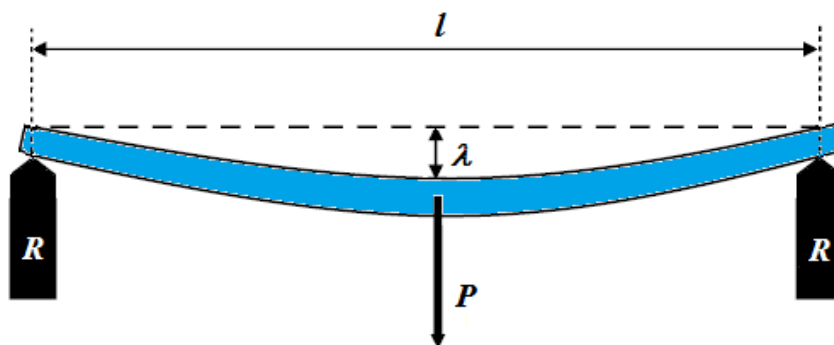


Rys. 2. Naprężenie wewnętrzne jako funkcja względnego przyrostu długości rozciąganego ciała.

Wykres naprężenia wewnętrznego jako funkcji wydłużenia względnego rozciąganego drutu lub pręta przedstawia rys. 2. Przedział $0 - A$ na wykresie jest zakresem sprężystości, w którym ze względu na liniowy charakter stosuje się prawo Hooke'a. Punkt B oznacza koniec zakresu sprężystości. Przedział $B - C$ jest zakresem plastyczności materiału. Punkt D stanowi granicę wytrzymałości materiału, której przekroczenie powoduje rozerwanie drutu czy pręta. Materiały o stosunkowo dużym przedziale $0 - B$ nazywamy materiałami sprężystymi (np. stal, guma). Dla niektórych materiałów najdłuższa część wykresu zawiera się pomiędzy punktami $B - C$. Takie materiały nazywamy plastycznymi (np. ołów, cyna). Materiały mające bardzo mały zakres sprężystości i plastyczności nazywamy kruchymi (np. żeliwo, beton).

Metoda pomiaru

Do pomiaru modułu Younga prętów grubych można posłużyć się metodą ugięcia pręta podpartego z obydwu stron (rys. 3). Ugięcie powstaje pod wpływem siły P prostopadłej do pręta i przyłożonej w środkowej części pręta tj. w odległości $l/2$ od punktu podparcia.



Rys. 3. Ugięcie siłą P pręta obustronnie podpartego.

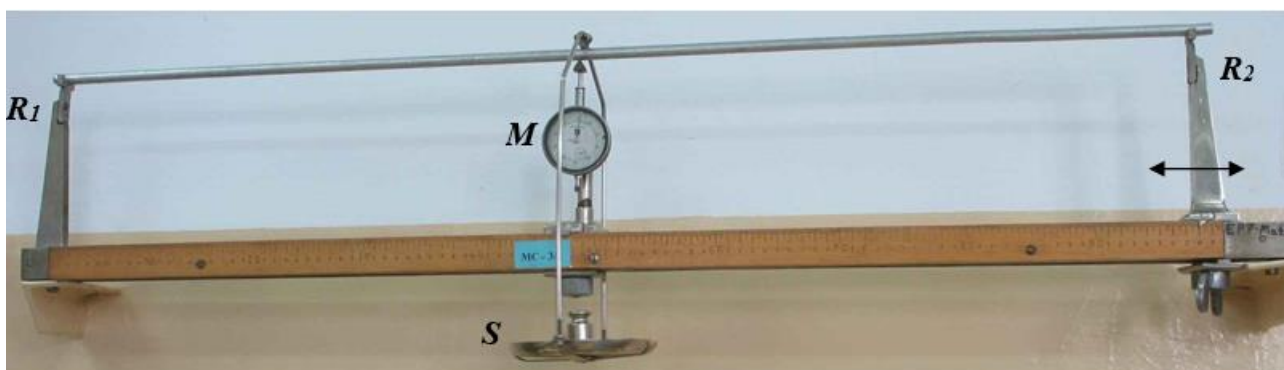
Zachodzi wówczas zjawisko równoczesnego ściskania górnej i rozciągania dolnej, czyli przeciwnych powierzchni ciała. Środkowa warstwa (znajdująca się pomiędzy górną a dolną powierzchnią) jest neutralna i nie podlega ani ściskaniu ani rozciąganiu. Zarówno ściskanie jak i rozciąganie zachodzi w granicy odkształceń sprężystych, dla których ma zastosowanie prawo Hooke'a. Miarą odkształcenia jest strzałka ugięcia λ . Tą metodą moduł Younga E możemy wyznaczyć stosując zależności (7) gdzie dla prętów o przekroju prostokątnym stosujemy wzór (a), natomiast dla prętów o przekroju okrągłym stosujemy wzór (b).

$$(a) \quad E = \frac{P \cdot l^3}{4 \cdot \lambda \cdot a \cdot b^3}, \quad (b) \quad E = \frac{4 \cdot P \cdot l^3}{3 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot d^4} \quad (7)$$

Oznaczenia występujące we wzorach: P – siła uginająca pręt (ciężar szalki z obciążnikami), l – długość pręta, czyli odległość między podporami (pryzmatami) R , λ - strzałka ugięcia, a i b – odpowiednio szerokość i wysokość prostokąta będącego przekrojem pręta, d – średnica pręta o przekroju okrągłym.

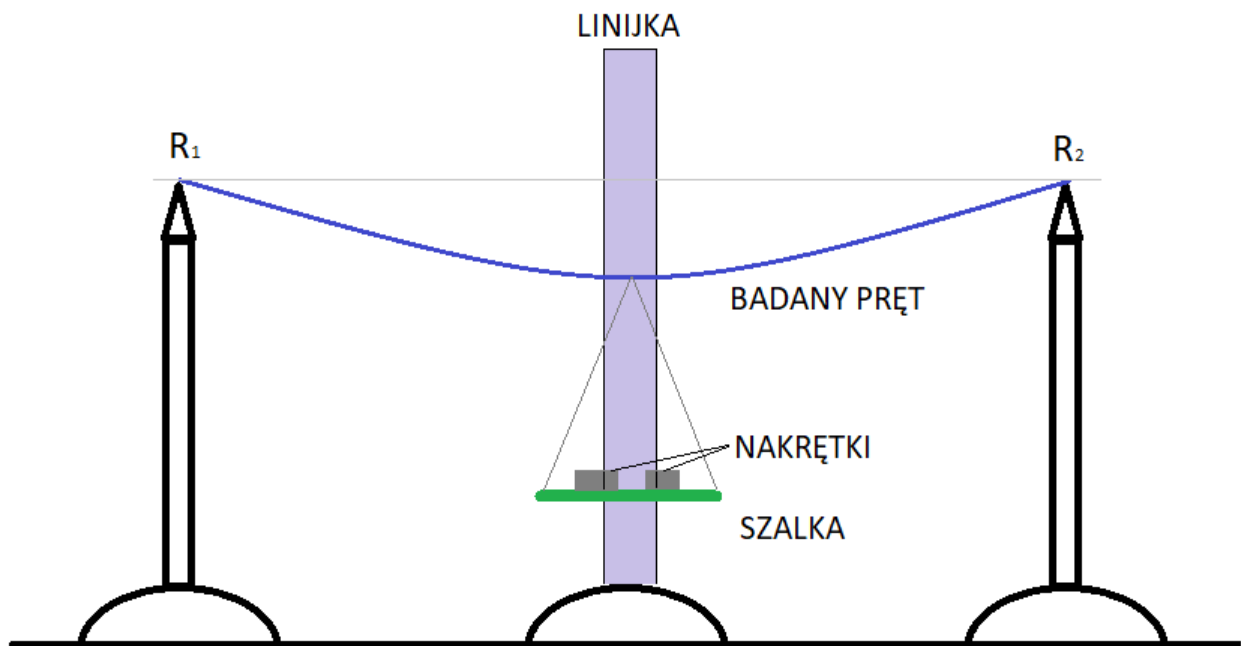
Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie modułu Younga np. drewnianej listewki o przekroju kwadratowym lub prostokątnym. Ze względu na to, iż nie każdy może mieć dostęp do miernika zegarowego, który zwykle używany jest do pomiaru strzałki ugięcia pręta (Rys 4), układ pomiarowy można nieco zmodyfikować.



Rys. 4. Fotografia przedstawiająca stanowisko pomiarowe w sali laboratorium fizyki. Oznaczenia: M – mikromierz, S – szalka, R_1 – stalowy pryzmat, R_2 – stalowy pryzmat o regulowanym położeniu.

Zamiast miernika zegarowego zastosować można zwykłą linijkę lub arkusz papieru milimetrowego postawionym za szalką. Przy czym obciążenie szalki należy tak dobrać, aby ugięcie było na tyle duże, aby jego zmiany można było odczytać z linijki lub papieru milimetrowego. Za obciążniki posłużyć mogą np. nakrętki $\Phi 14$, $\Phi 16$ lub $\Phi 18$ w zależności od sztywności badanego pręta. Samą szalkę wykonać można z metalowej pokrywki od słoika typu twist-off zawieszanej na cienkim druciku. Pryzmaty R_1 i R_2 można wykonać np. ze ściętych na płasko patyczków wbitych np. w połówki ziemniaka (Rys.5)



Rys. 5. Schemat stanowiska pomiarowego.

Wykonanie ćwiczenia

1. Dokonać linijką lub suwmiarką pomiarów boków a i b np. co 5 cm wzdłuż boku a i wzdłuż boku b . Jako wyniki końcowe przyjąć średnią arytmetyczną.
2. Położyć pręt na pryzmatach R_1 i R_2 . Odległość między pryzmatami, będąca długością l zmierzyć linijką.
3. Na środku badanego pręta zawiesić szalkę.
4. W środkowej części między pryzmatami umieścić pionowo linijkę lub arkusz papieru milimetrowego tak aby nie dotykały szalki.
5. Nakładając na szalkę odważniki (nakrętki) o ciężarze P (dobieramy odpowiednio do sztywności badanego pręta tak aby nie przekroczyć zakresu odkształceń sprężystych, a więc aby zachowana została zdolność pręta do powrotu do pierwotnego kształtu, co można zaobserwować przy próbnym odkształceniu), odczytujemy wskazania z pionowo ustawionej linijki lub z papieru milimetrowego. Możemy w tym celu do spodu pokrywki (szalki) przykleić np. wykałaczkę jako wskaźnik. Przy odczycie strzałki ugięcia λ nie uwzględniamy ciężaru szalki. Układ z powieszoną szalką traktujemy jako wyjściowy. Ciężar obciążników P wyznaczymy mnożąc masę nakrętki wyrażoną w kg przez wartość przyspieszenia ziemskiego ($9,81 \text{ m/s}^2$). W tym celu należy zważyć nakrętki np. na wadze kuchennej. (Dla zwiększenia dokładności pomiaru, można zważyć większą ilość jednakowych nakrętek. Mając ich większą ilość można precyzyjnie określić ich masę nawet dysponując wagą kuchenną).
6. Odczytów dokonać także przy zmniejszaniu obciążenia.
7. Sporządzić wykres ciężaru P w funkcji strzałki ugięcia λ tj. $P = f(\lambda)$.
8. Obliczenia końcowej wartości modułu sprężystości E dokonać jedną z dwu metod (wyboru dokonuje prowadzący ćwiczenia):

- a. Opierając się na sporządzonym wykresie poprzez zastosowanie metody najmniejszych kwadratów otrzymujemy prostą $P = A \cdot \lambda$. Dla prostoliniowego odcinka zależności $P = f(\lambda)$ ze wzoru (8) (będącego przekształceniem wzoru (7)

$$E = \frac{P \cdot l^3}{4 \cdot \lambda \cdot a \cdot b^3} \quad (8)$$

wyliczamy współczynnik kierunkowy prostej A . Współczynnik A we wzorze (8) wynosi:

$$A = E \cdot \frac{4 \cdot a \cdot b^3}{l^3} \quad (9)$$

Przekształcając wzór (9) wyliczamy moduł Younga E , który wyliczamy stosując wzór (10).

$$E = \frac{A \cdot l^3}{4 \cdot a \cdot b^3} \quad (10)$$

- b. Obliczając moduły Younga dla poszczególnych obciążeń i jako wynik końcowy przyjmując średnie arytmetyczne wyliczone dla pomiarów przy zwiększającym obciążeniu oraz dla pomiarów przy zmniejszającym obciążeniu. Poszczególnych obliczeń dokonujemy na podstawie wzoru (7a).

10. Wyniki pomiarów wpisać do tabeli.

Seria	L.p	P [N]	l [m]	λ [m]	a [m]	a_{sr} [m]	b [m]	b_{sr} [m]	E [N/m ²]	E_{sr} [N/m ²]
Zwiększanie obciążenia	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
Zmniejszanie obciążenia	1									
	2									
	3									
	4									
	5									

Obliczanie niepewności pomiarowej:

Maksymalną niepewność pomiaru modułu sprężystości E można obliczyć przy zastosowaniu różniczkowania wzoru 7a dla wybranego pomiaru leżącego najbliżej prostej. Do wyznaczenia niepewności pomiarowych mierzonych bezpośrednio Δa , Δb przyjmujemy dokładność odczytu z podziałki linijki lub suwmiarki, $\Delta \lambda$ - dokładność odczytu z podziałki linijki lub papieru milimetrowego, Δl - dokładność odczytu długości pręta (odległości między przyzmatami R_1 i R_2).

Zagadnienia do kolokwium:

1. Rodzaje ciał stałych.
2. Rodzaje odkształceń.
3. Pojęcie odkształcenia względnego i naprężenia.
4. Prawo Hooke'a.
5. Zależność odkształcenia względnego w funkcji naprężenia.
6. Wyznaczanie modułu Younga z ugięcia.

Bibliografia:

1. Massalski J., Massalska M., *Fizyka dla inżynierów*. WN-T, Warszawa, 2008, tom 1.
2. Halliday D., Resnick R., Walker J., *Podstawy fizyki*, PWN, Warszawa 2003, tom 2.
3. Szydłowski H., *Pracownia fizyczna*. PWN, Warszawa, 1994.

Opracował Adam Prószyński