

## Niepewności pomiarowe w pracowni fizycznej

Wielkość fizyczną można wyznaczyć w sposób bezpośredni lub pośredni [1]. W pierwszym przypadku stosujemy odpowiedni przyrząd pomiarowy, np. amperomierz do pomiaru natężenia prądu. Pomiar pośredni polega na wykorzystaniu zależności wynikającej z praw fizyki i wyrażonej wzorem, w którym występują wielkości fizyczne dające się zmierzyć bezpośrednio. Na przykład, żeby wyznaczyć opór elektryczny  $R$  opornika możemy obliczyć go z prawa Ohma  $R = U/I$  podstawiając do wzoru zmierzone wartości natężenia prądu  $I$  płynącego przez opornik i napięcia  $U$  na tym oporniku. W tym przypadku, opór elektryczny może być też zmierzony bezpośrednio omomierzem, ale wiele innych wielkości fizycznych można zmierzyć tylko pośrednio, bo nie ma odpowiednich przyrządów do ich pomiaru.

Każdy pomiar wielkości fizycznej jest ograniczony w swojej dokładności, co jest skutkiem: a) skończonej dokładności użytych przyrządów pomiarowych, b) niedokładności zmysłów i działań eksperymentatora, c) zjawisk fizycznych uniemożliwiających precyzyjny pomiar, jak np. różnego typu szumy w obwodach elektrycznych czułych przyrządów powodujące losowe fluktuacje wartości mierzonej [2]. Powyższe trzy czynniki decydują, czy ograniczamy się do jednego pomiaru danej wielkości, czy też jest on powtarzany wielokrotnie. Duże znaczenie ma tu dokładność przyrządu pomiarowego, o której decyduje klasa przyrządu i rozdzielczość [2] jego skali lub wyświetlacza. Gdy jest mała, każdy kolejny pomiar daje tę samą wartość i porzeczamy na pierwszym uzyskanym wyniku. Gdy dokładność przyrządu jest duża i wyniki są różne, pomiary powtarzamy wielokrotnie. Dla przykładu, mierząc czas trwania jakiegoś zdarzenia, np. 30 wahaniec wahadła, przy pomocy zegarka z sekundnikiem wystarczy zrobić to raz, bo każdy kolejny poprawnie wykonany pomiar da wynik mieszczący się w przedziale o szerokości 1 s. Natomiast gdy taki pomiar wykonamy przy pomocy stopera elektronicznego mierzącego czas z rozdzielczością 0,01 s, rozrzut wyników pomiarów jest dobrze widoczny i należy wykonać wiele pomiarów, z których obliczamy średnią arytmetyczną. Lepszy przyrząd i dodatkowy wysiłek włożony w wielokrotne pomiary opłaca się, gdyż tak uzyskany wynik jest bliższy rzeczywistej wartości  $x_0$  wielkości mierzonej  $x$ .

Podając wynik pomiaru w sposób profesjonalny, należy zawsze podać również jego niedokładność. Dla jednokrotnych pomiarów wielkości  $x$  podajemy *maksymalną/graniczną niepewność pomiaru*  $\Delta x$  [2] (w skrócie: niepewność pomiaru<sup>1</sup>), a dla pomiarów wielokrotnych postać *niepewności/odchylenia standardowego*  $\sigma_x$  lub jego wielokrotności – najczęściej  $3\sigma_x$  [1]. Z założenia, zarówno  $\Delta x$  jak i  $\sigma_x$  są wielkościami dodatnimi i mierzonymi w tych samych jednostkach co  $x$ . Często sama wartość niepewności nie daje jednak wystarczającej informacji o dokładności pomiaru co widać na przykładzie pomiaru długości i szerokości książki i samochodu z dokładnością do 1 mm. Choć wartość niepewności jest taka sama, pomiar samochodu z podaną dokładnością jest trudniejszy niż znacznie mniejszej książki. Z tego też względu warto scharakteryzować wynik pomiaru podając dodatkowo wartość *niepewności względnej* zdefiniowanej dla wielkości  $x$  jako  $\delta x = \Delta x/x$  lub częściej *niepewności względnej procentowej*  $\delta x\% = (\Delta x/x) \cdot 100\%$ . Czasem w sytuacji gdy używamy obydwu pojęć - niepewność  $\Delta x$  i niepewność względna  $\delta x$  - tę pierwszą nazywa się szerzej *niepewnością bezwzględną* dla uzyskania większej precyzji sformułowań.

O wielkości niepewności (bezwzględnej) decyduje użyty sprzęt pomiarowy, ale też umiejętności i zmysły (wzrok, słuch, refleks) eksperymentatora. Czynniki sprzętowe da się precyzyjnie ocenić korzystając z danych producenta, informującego o dokładności lub klasie przyrządu. Czynniki ludzkie szacujemy podając wartość niepewności  $\Delta x$ , której na pewno osoba wykonująca pomiar nie przekroczy.

1. W starszych podręcznikach [4-6] jest ona nazywana maksymalnym błędem pomiarowym. W obecnie obowiązującej nomenklaturze, przedstawionej w nowszych publikacjach [2,7], przez *błąd pomiarowy* rozumie się różnicę między wartością zmierzoną i wartością rzeczywistą, czyli  $x_i - x_0$ . Użyteczność tego pojęcia jest jednak ograniczona głównie do rozważań teoretycznych, gdyż nie znamy wartości rzeczywistej, a często nawet wartości tablicowej mierzonej wielkości.

## I. Szacowanie maksymalnej niepewności pomiaru

Niepewność pomiaru bezpośredniego wynika z dokładności zastosowanych przyrządów i dokładności osoby wykonującej pomiar.

### 1) Pomiar czasu

Suma czasu reakcji osoby wykonującej doświadczenie, potrzebnego na włączenie (start) i zatrzymanie (stop) stopera, oraz rozdzielczości odczytu. Można przyjąć, że niepewność pomiaru czasu wynosi  $\Delta t = 0,2 \text{ s} + 0,2 \text{ s} + 0,01 \text{ s}$ , jeśli czas reakcji szacujemy jako 0,2 s a rozdzielczość stopera elektronicznego wynosi 0,01 s. Czas reakcji możemy przyjąć większy, np. 0,25 lub 0,30 s, gdy chcemy mieć większą pewność, że nie przekroczymy obliczonej wartości  $\Delta t$ . Dokładne ustalenie czasu reakcji danej osoby jest możliwe poprzez wielokrotny pomiar czasu trwania mierzonego zdarzenia i obliczenie dla uzyskanych wartości odchylenia standardowego  $3\sigma$ .

### 2) Pomiar temperatury

Wartość działki elementarnej, czyli odległości między najbliższymi kreskami skali, np.  $1 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $0,5 \text{ }^\circ\text{C}$ , a nawet  $0,1 \text{ }^\circ\text{C}$  w zależności od dokładności wyskalowania termometru. W obliczeniach taką niepewność zapisujemy w kelwinach, np.  $\Delta T = 0,5 \text{ K}$ .

### 3) Pomiar masy

Masa najmniejszego odważnika użytego do zrównoważenia wagi szalkowej, np.  $\Delta m = 10 \text{ mg} = 10^{-5} \text{ kg}$ . Przyjmujemy, że waga jest zrównowazona, gdy dodanie albo odjęcie odważnika o masie  $\Delta m$  skutkuje większym odchyleniem wskazówki od punktu „0” na skali wagi. W przypadku wagi elektronicznej, jej dokładność podana jest zwykle na przyrządzie.

### 4) Pomiar natężenia prądu

Są dwa składniki niepewności pomiarowej: 1) niepewność podstawowa  $\Delta I_p$  związana z dokładnością działania miernika, którą określa klasa podana przez producenta, 2) niepewność odczytu  $\Delta I_{od}$ . W przypadku mierników analogowych, podających wynik przez wychylenie wskazówki na skali,  $\Delta I_{od}$  zależy od wartości działki elementarnej (wartość zakresu podzielona przez liczbę działek skali) oraz współczynnika  $p$  charakteryzującego precyzję z jaką mierzący lokalizuje położenie wskazówki w obrębie działki elementarnej (początkujący przyjmują zwykle  $p = 1$  lub  $0,5$ , doświadczeni nawet  $p = 0,1$ ). Dla mierników cyfrowych  $\Delta I_{od}$  przyjmowana jest najczęściej jako rozdzielczość odczytu, czyli wartości jedynek wyświetlanej na ostatnim miejscu wyświetlacza.

$$\text{Dla amperomierza analogowego} \quad \Delta I = \Delta I_p + \Delta I_{od} = \frac{\text{klasa} \times \text{zakres}}{100} + p \frac{\text{zakres}}{\text{liczba działek}}$$

$$\text{Dla amperomierza cyfrowego} \quad \Delta I = \Delta I_p + \Delta I_{od} = \frac{\text{klasa} \times \text{wartość pomiaru}}{100} + \text{rozd. odczytu}$$

### 5) Pomiar napięcia

Dokładność odczytu napięcia  $\Delta U$  z woltomierza oceniamy analogicznie jak w przypadku odczytu natężenia prądu z amperomierza.

### 6) Niepewność wartości oporu elektrycznego nastawionego na oporniku dekadowym

Sumujemy wartości niepewności oporów nastawionych na poszczególnych dekadach, czyli

$$\Delta R = \sum_i \Delta R_i \quad . \quad \text{Dla } i\text{-tej dekady wynosi ona} \quad \Delta R_i = \frac{\text{klasa dekady} \times \text{wartość nastawiona}}{100} .$$

Uwaga: klasa każdej dekady może być inna.

### 7) Pojemność lub indukcyjność (przyrząd dekadowy)

$\Delta C$  lub  $\Delta L$  są obliczane analogicznie jak dla opornika dekadowego.

### 8) Pomiar długości

Wartość działki elementarnej przyrządu, np. 1 mm dla przymiaru liniowego (potocznie: linijki), 0,1 lub 0,02 mm dla suwmiarki w zależności od dokładności skali noniusza oraz 0,01 mm dla śruby mikrometrycznej. Należy zwiększyć te wartości gdy granice obiektu mierzonego linijką są nieostre i trudne do precyzyjnego zlokalizowania na skali.

### Przykład 1:

- Niepewność pomiaru długości pręta metalowego wynosi  $\Delta l = 2$  mm, gdyż początek pręta z dokładnością do 1 mm pokrywa się z zerem skali linijki, a odczytu położenia końca pręta też dokonujemy z dokładnością do 1 mm.
- Niepewność pomiaru średnicy kulki mierzonej pod mikroskopem oceniamy na  $\Delta d = 4$  dz (dz – działka skali okularowej mikroskopu), gdyż ze względu na nieostrość obrazu granicy kulki i chropowatość jej powierzchni położenie brzegu kulki wyznaczone jest z dokładnością 2 dz z obu stron. Jeśli wartość jednej działki wynosi  $32 \mu\text{m}$ , to  $\Delta d = 1,28 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ , a niepewność pomiaru jej promienia wynosi  $\Delta r = \Delta d / 2 = 6,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ .
- Niepewność pomiaru natężenia prądu mierzonego amperomierzem analogowym obliczamy znając klasę przyrządu, nastawiony zakres oraz liczbę działek na skali, z której dokonywano odczytu. Dla miernika z rys. 1a: klasa wynosi 0,5 (jest podana na tarczy przyrządu), zakres 7500 mA czyli 7,5 A, a liczba działek na górnej skali 75 oraz dolnej 60. Niepewność pomiaru wynosi więc:

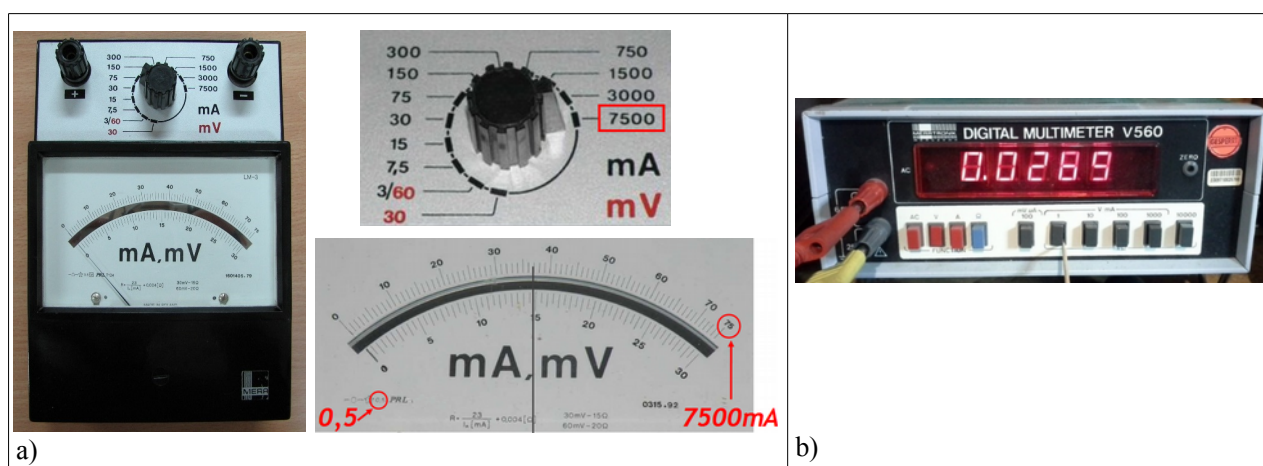
$$\Delta I = 0,5 \cdot 7,5 \text{ A} / 100 + 7,5 \text{ A} / 75 = 0,0375 \text{ A} + 0,1 \text{ A} = 0,1375 \text{ A} \quad (\text{dla odczytu ze skali górnej}),$$

$$\Delta I = 0,5 \cdot 7,5 \text{ A} / 100 + 7,5 \text{ A} / 60 = 0,0375 \text{ A} + 0,125 \text{ A} = 0,1625 \text{ A} \quad (\text{dla odczytu ze skali dolnej}).$$

Wartość natężenia prądu obliczamy mnożąc odczytane położenie wskazówki na skali, czyli wskazanie, przez nastawiony zakres miernika i dzieląc przez granicę skali (u nas 75 dla górnej i 30 dla dolnej), tzn.  $I = \text{wskazanie} \times \text{zakres} / \text{granica skali}$ . Odczytując położenie wskazówki z rys. 1a, dla górnej skali  $I = 37 \cdot 7,5 \text{ A} / 75 = 3,7 \text{ A}$ , a dla dolnej  $I = 14,8 \cdot 7,5 \text{ A} / 30 = 3,7 \text{ A}$ .

Niepewność pomiaru napięcia elektrycznego przy pomocy woltomierza cyfrowego z rys. 1b obliczamy znając jego klasę 0,1 dla nastawionego zakresu 1 V oraz wartość pomiaru  $U = 0,0289 \text{ V}$ :

$$\Delta U = 0,1 \cdot 0,0289 \text{ V} / 100 + 0,0001 \text{ V} = 0,0001289 \text{ V}.$$



Rys. 1. Mierniki elektryczne: a) miernik analogowy (amperomierz+woltomierz magnetoelektryczny, typ LM-3) do pomiaru napięcia i natężenia prądu stałego wraz z zdjęciem obrotowego przełącznika zakresów i położenia wskazówki na tarczy przyrządu podczas pomiaru, b) multimetr cyfrowy (typ V560) pracujący tu jako woltomierz prądu stałego.

Każdy pomiar ma nie tylko ograniczoną dokładność, szacowaną przez jego niepewność, ale stanowi okazję popełnienia błędu podczas pomiarów, tzw. *błąd grubego*. Może się on pojawić zarówno z powodu zbudowania niewłaściwego układu pomiarowego, złego działania przyrządu lub jego niewłaściwej obsługi, nieuwagi eksperymentatora podczas pomiarów czy zapisu wyników. Dla przykładu, na woltomierzu wielozakresowym możemy odczytać poprawnie wychylenie wskazówki na skali, ale błędnie zapisać zakres pomiaru, co da nam błędny wynik. Możemy również pomylić się zapisując wyniki z niewłaściwą jednostką, np. napięcie w [V] zamiast [mV]. Najlepszym sposobem uniknięcia błędu grubego jest zachowanie staranności podczas pomiaru i wykonanie obliczeń kontrolnych wielkości mierzonej jeszcze przed rozmontowaniem układu pomiarowego.

Innym rodzajem błędu, którego można i trzeba unikać, jest *błąd systematyczny*. Powstaje wtedy, gdy dokonując pomiarów, systematycznie/stale zawyżamy albo zaniżamy wartość wielkości mierzonej. Może to mieć miejsce, gdy np. mierzymy natężenie prądu amperomierzem analogowym, którego wskazówka nie

wskazuje „zera” przy zerowym prądzie a jest wychylona np. o kilka działek w prawo. Gdy wykonujący pomiary tego nie zauważy, wszystkie wyniki będą zawyżone. Z takim błędem jest trudno walczyć, szczególnie gdy nie prowadzi do dużych różnic między wartościami obliczoną a rzeczywistą wielkości mierzonej pośrednio. Dysponując jednak większą liczbą takich obliczeń, można przeprowadzić analizę statystyczną, aby sprawdzić czy nie są one stale zawyżone albo zaniżone względem wartości rzeczywistej, jeśli ją znamy z innych pomiarów. Gdy tak się dzieje, szukamy który pomiar bezpośredni odpowiada za takie zawyżenie/zaniżenie i na skutek czego taki błędny pomiar występuje.

**Niepewność pomiaru pośredniego** wielkości  $W$  obliczanej ze wzoru  $W(x, y, z)$ , gdzie wzór zapisany jest dla przykładowych trzech mierzonych bezpośrednio wielkości fizycznych  $x, y, z$ , możemy obliczyć **metodą różniczkową**. Postępując zgodnie z nią, wartość  $\Delta W$  otrzymujemy z różniczki zupełnej  $W$  danej wzorem:

$$\Delta W = \left| \frac{\partial W}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial W}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial W}{\partial z} \right| \Delta z, \quad (1)$$

gdzie poszczególne składniki są równe wartości bezwzględnej pochodnej cząstkowej wzoru  $W$  po kolejnej zmiennej (wielkości mierzonej) pomnożonej przez niepewność tej wielkości. Oczywiście, ilość wielkości mierzonych bezpośrednio zależy od wybranego ćwiczenia laboratoryjnego i może być równa od jeden do pięciu dla ćwiczeń na Pracowni Fizyki Katedry Fizyki Stosowanej PL. Należy wykonać obliczenia pochodnych zadanych przez wzór (1), po czym powinno się możliwie uprościć postać matematyczną wzoru końcowego tak, aby po podstawieniu wartości pomiarów i ich niepewności nie wykonywać zbędnych operacji liczbowych, mogących zakończyć się błędem w obliczeniach.

Wykonując obliczenia, notujemy wyniki pośrednie, np. składniki wzoru (1), z rozsądną dokładnością, tzn. unikając nadmiernych zaokrągleń, ale i zapisywania zbyt wielu cyfr. Można przyjąć jako praktyczną zasadę ograniczenie się do zapisu czterech cyfr nie wliczając ewentualnych zer na początku, np. pisząc 12,34 zamiast 12,338531 lub 0,01730 zamiast 0,017302884. Obliczony wynik końcowy  $\Delta W$  zaokrąglamy zawsze w górę i zapisujemy jego wartość podając nie więcej niż dwie cyfry, z których pierwsza określa rząd niepewności pomiaru. Pozostawiamy zawsze cyfrę niższego rzędu w sytuacji, gdyby zaokrąglanie  $\Delta W$  do jednej cyfry znaczącej prowadziło do zwiększenia wartości o więcej niż 10% pierwotnej wartości. Podając wartość  $W$ , ograniczamy ilość cyfr do rzędu cyfr znaczących niepewności  $\Delta W$ , np.  $g = (9,8 \pm 0,2)$  m/s<sup>2</sup> zamiast  $g = (9,791 \pm 0,2)$  m/s<sup>2</sup>. Warto podać również niepewność względną procentową  $\delta W\%$ , określającą w procentach, jaką część wielkości mierzonej stanowi niepewność pomiaru:

$$\delta W \% = \frac{100 \cdot \Delta W}{W} \% .$$

Tak zdefiniowany parametr pozwala na wygodne porównanie dokładności pomiaru danej wielkości fizycznej i wybranie optymalnej metody lub układu pomiarowego.

Zdarza się dość często, że postać wzoru obliczanej wielkości  $W$  jest iloczynem lub ilorazem potęg poszczególnych zmiennych. Przykładowo, dla trzech wielkości mierzonych ma on postać:

$$W(x, y, z) = A \cdot x^a y^b z^c, \quad (2)$$

gdzie  $A$  jest dowolną stałą, natomiast potęgi  $a, b$  i  $c$  są liczbami rzeczywistymi dodatnimi lub ujemnymi. Wtedy metodę różniczkową warto zastąpić prostszą rachunkowo **metodą różniczkową uproszczoną**. Zgodnie z nią obliczamy niepewność względną  $\delta W$  z prostego wzoru:

$$\frac{\Delta W}{W} = |a| \frac{\Delta x}{|x|} + |b| \frac{\Delta y}{|y|} + |c| \frac{\Delta z}{|z|} . \quad (3)$$

Wzór (3) można łatwo uzyskać z metody różniczkowej zastosowanej do wzoru (2) w celu obliczenia  $\Delta W$  a następnie podzielenia wyniku przez wyrażenie z prawej strony równania (2). Po takiej operacji i zastosowaniu wartości bezwzględnych, by kolejne składniki zawsze dodawały się, a nie odejmowały, uzyskuje się już prawą stronę wzoru (3). Prosta postać równania (3) praktycznie eliminuje możliwość popełnienia błędu rachunkowego podczas obliczania niepewności względnej  $\delta W$  – stąd jej składnik nazwy „uproszczona”. Gdy chcemy podać wartość niepewności bezwzględnej, wystarczy skorzystać z zależności  $\Delta W = \delta W \cdot W$ .

---

**Przykład 2:**

Przyspieszenie ziemskie mierzone przy pomocy wahadła prostego można obliczyć ze wzoru:

$$g(l, T) = \frac{4\pi^2 l}{T^2}, \quad (4)$$

gdzie  $T$  oznacza okres wahań, a  $l$  długość wahadła będąca sumą długości nici  $l_1$  od punktu zamocowania nici do górnej części kulki oraz połowy średnicy  $d$  zawieszony kulki, czyli  $l = l_1 + d/2$ . Pomiary dały wyniki:  $l_1 = 119,4$  cm,  $d = 2,46$  cm i  $t = 44,08$  s dla  $n = 20$  wahań. Żeby obliczyć wartość  $g$ , do wzoru (4) podstawiamy więc  $l = 1,194$  m +  $0,0246$  m/2 =  $1,206$  m oraz okres wahań  $T = 44,08$  s/20 =  $2,204$  s

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot 1,206 \text{ m}}{(2,204 \text{ s})^2} = 9,804 \text{ m/s}^2.$$

W ocenie dokładności pomiaru  $g$  metodą różniczkową stosujemy postać ogólną różniczki zupełnej:

$$\Delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial l} \right| \Delta l + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \right| \Delta T.$$

Po obliczeniu pochodnych cząstkowych i uproszczeniach matematycznych, otrzymujemy wzór wyrażający niepewność pomiarową wielkości mierzonej w postaci:

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{T^2} \Delta l + \frac{8\pi^2 l}{T^3} \Delta T \quad (5)$$

Do wzoru (5) podstawiamy wartości  $l$  i  $T$  oraz ich oszacowanych niepewności pomiaru:

$\Delta l = 2,025 \cdot 10^{-3}$  m, ponieważ pomiar długości nici wahadła  $l_1$  jest wykonany z dokładnością  $\Delta l_1 = 2$  mm a średnicy kulki  $d$  z dokładnością  $\Delta d = 0,05$  mm (dokładność suwmiarki), więc  $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta d/2 = 2$  mm +  $0,05$  mm/2.

$\Delta T = 2,55 \cdot 10^{-2}$  s, ponieważ  $\Delta T = \Delta t/n$ , gdzie  $n$  oznacza liczbę pełnych wahań wahadła, tu  $n = 20$ , a wartość  $\Delta t$  oszacowana jest jako równa  $0,25$  s (start) +  $0,25$  s (stop) +  $0,01$  s (odczyt) =  $0,51$  s.

Podstawiając do wzoru (5) uzyskujemy:

$$\Delta g = \frac{4 \cdot 3,14^2}{(2,204 \text{ s})^2} \cdot 2,025 \cdot 10^{-3} \text{ m} + \frac{8 \cdot 3,14^2 \cdot 1,206 \text{ m}}{(2,204 \text{ s})^3} \cdot 2,55 \cdot 10^{-2} \text{ s} = 0,0165 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 0,227 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,243 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Po dokonaniu zaokrągleń wartości mierzonej do rzędu niepewności pomiarowej (tu: pierwsze miejsce po przecinku, czyli rząd dziesiątych), wynik pomiaru wartości przyspieszenia ziemskiego wyznaczonej w ćwiczeniu można podać w postaci  $g = (9,8 \pm 0,25) \text{ m/s}^2$ . W tym zapisie podajemy wartość  $\Delta g = 0,25 \text{ m/s}^2$  zamiast  $0,3 \text{ m/s}^2$ , gdyż takie zaokrąglenie prowadziłoby do nadmiernego przyrostu  $\Delta g$  aż o  $(0,30 - 0,243)/0,25 = 23\%$  zamiast dopuszczalnej maksymalnej wartości  $10\%$ .

Względna niepewność pomiaru wynosi  $\delta g \% = \frac{\Delta g \cdot 100}{g} \% = \frac{0,25 \text{ m/s}^2 \cdot 100}{9,8 \text{ m/s}^2} \% = 2,6\%$ .

Zastosowanie metody różniczkowej uproszczonej w postaci zależności (3) do wzoru (4) daje formułę

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta T}{T},$$

która jest prostsza niż ta podana wzorem (5). Łatwiejsze są też obliczenia po podstawieniu wartości zmiennych

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{2,025 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1,206 \text{ m}} + 2 \frac{2,55 \cdot 10^{-2} \text{ s}}{2,204 \text{ s}} = 0,0017 + 0,0231 = 0,0248,$$

co prowadzi do wartości niepewności względnej procentowej  $\delta g \% = 2,5\%$ .

---

Gdy wzór używany do obliczenia wielkości  $W$  ma postać uniemożliwiającą zastosowanie metody różniczkowej uproszczonej lub obliczenia pochodnych cząstkowych do metody różniczkowej są zbyt trudne, warto zastosować **metodą różnicową**. Polega ona na obliczeniu zmiany wartości funkcji  $W$  przy przyroście każdej z wielkości mierzonych bezpośrednio o wielkość jej niepewności pomiaru. Korzystając z przykładowej zależności  $W(x, y, z)$  od trzech wielkości zmierzonych  $x, y$  oraz  $z$ , niepewność pomiaru

wielkości  $W$  można oszacować z wzoru:

$$\Delta W = \Delta W_{+\Delta x} + \Delta W_{+\Delta y} + \Delta W_{+\Delta z} \quad (6)$$

gdzie składniki po prawej stronie równości oznaczają przyrosty wartości  $W$  następujące po zwiększeniu wartości kolejnych zmiennych o ich niepewność pomiarową. Każdy z nich obliczamy jako wartość bezwzględnej różnicy – stąd nazwa metody – między wartością wielkości  $W$  dla powiększonego argumentu  $x, y$  albo  $z$  a wielkością  $W$  dla wartości zmierzonych. Na przykład, pierwszy składnik ma postać:

$$\Delta W_{+\Delta x} = |W(x + \Delta x, y, z) - W(x, y, z)| \quad (7)$$

Zastosowanie tej metody jest możliwe dla dowolnej ilości wielkości mierzonych bezpośrednio i dowolnej postaci wzoru wyrażającego zmienną  $W$ . Metoda różnicowa jest zawsze zgodna ilościowo z metodą różniczkową zarówno gdy porównujemy  $\Delta W$  jak i jej składowe (składniki prawej strony równań (1) i (6)), o ile tylko wielkości niepewności pomiarów bezpośrednich są odpowiednio małe. Gdy te niepewności są już duże i zaczynają być widoczne różnice między obliczaniem wartości, to bardziej wiarygodne/poprawne, jak uzasadniał to Squires [4], są wyniki dane przez metodę różnicową.

*Przykład 3:*

Metoda różnicowa zostanie zastosowana tu do oszacowania niepewności pomiaru wielkości zależnej od dwóch wielkości mierzonych bezpośrednio. Żeby umożliwić porównanie wyników i pracochłonności trzech podanych metod, obliczenia będą wykonane dla pomiaru przyspieszenia ziemskiego z przykładu 2. Wzór (6) przyjmując tu postać:

$$\Delta g = \Delta g_{+\Delta l} + \Delta g_{+\Delta T} \quad (8)$$

Po uwzględnieniu definicji (7) dla dwóch składników prawej strony równania (8) mamy:

$$\Delta g = |g(l + \Delta l, T) - g(l, T)| + |g(l, T + \Delta T) - g(l, T)| \quad (9)$$

Oznacza to, że obliczenia  $\Delta g$  wykonujemy z zależności:

$$\Delta g = \left| \frac{4\pi^2(l + \Delta l)}{T^2} - \frac{4\pi^2 l}{T^2} \right| + \left| \frac{4\pi^2 l}{(T + \Delta T)^2} - \frac{4\pi^2 l}{T^2} \right| \quad (10)$$

Obliczenia wartości  $\Delta g$  wykonujemy dla wartości zmiennych i ich niepewności podanych w przykładzie 2:  $l = 1,206 \text{ m}$ ,  $T = 2,204 \text{ s}$ ,  $\Delta l = 2,025 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  oraz  $\Delta T = 2,55 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ . Podstawiając do wzoru (10) uwzględniamy, że  $g(l, T) = 4\pi^2 l / T^2 = 9,801 \text{ m/s}^2$ , więc przyrosty/różnice podane po prawej stronie równania (10) mają wartość:

$$\Delta g_{+\Delta l} = \left| \frac{4\pi^2(1,206 \text{ m} + 0,002025 \text{ m})}{(2,204 \text{ s})^2} - 9,801 \text{ m/s}^2 \right| = 0,017 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta g_{+\Delta T} = \left| \frac{4\pi^2 \cdot 1,206 \text{ m}}{(2,204 \text{ s} + 0,0255 \text{ s})^2} - 9,801 \text{ m/s}^2 \right| = 0,223 \text{ m/s}^2$$

Niepewność pomiaru  $g$  oszacowana metodą różnicową wynosi więc  $\Delta g = 0,017 \text{ m/s}^2 + 0,223 \text{ m/s}^2 = 0,240 \text{ m/s}^2 = 0,24 \text{ m/s}^2$ . Metoda różnicowa daje więc, jak należało oczekiwać, bardzo zbliżoną wartość niepewności i jej składników jak dwie poprzednie metody z przykładu 2.

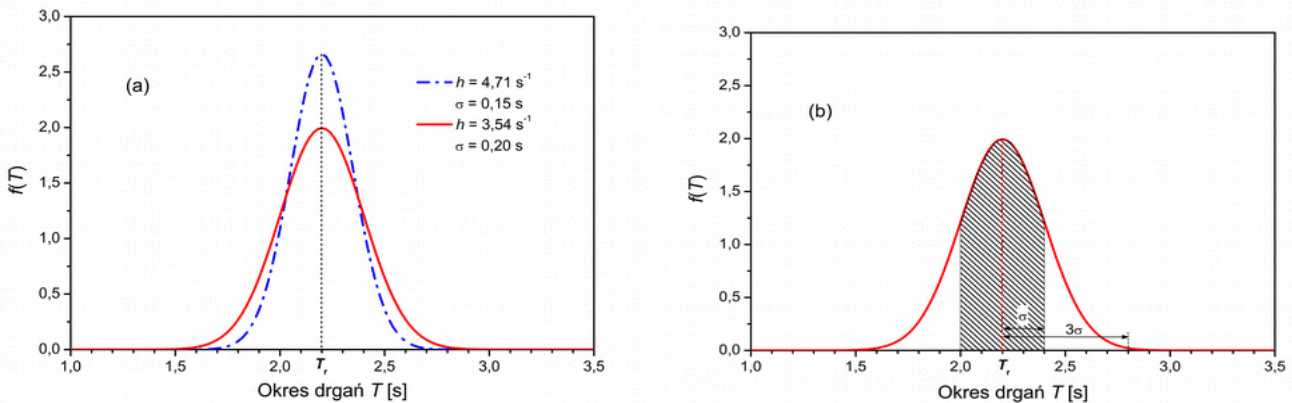
## II. Obliczanie odchylenia standardowego pomiarów wielokrotnych

W niektórych doświadczeniach pomiar wielkości fizycznej  $x$  nie daje tej samej wartości dla kolejnych powtórzeń pomiaru, a wartości wykraczają daleko poza dokładność wskazań przyrządu. Przykładem takiej sytuacji może być wielokrotny pomiar okresu wahań wahadła prostego przy pomocy elektronicznego stopera, gdzie uzyskuje się wyniki pomiarów rozrzucone w szerokim przedziale wokół wartości rzeczywistej  $T_0$ . Jest to spowodowane występowaniem czynników przypadkowych wpływających na wynik pomiaru: a) wynikających z niedokładności zmysłów i precyzji działania osoby wykonującej doświadczenie jak np. w przypadku pomiaru okresu wahań lub b) będących nieodłączną cechą zjawiska fizycznego jak np. statystyczny charakter rozpadu promieniotwórczego. Analiza wyników takich pomiarów bardzo wielu wielkości fizycznych pozwoliła stwierdzić, że prawdopodobieństwo  $p(x)$

uzyskania wyniku pomiaru mieszczącego się w przedziale od  $x$  do  $x+\Delta x$  dane jest zależnością  $p(x) = f(x)\Delta x$ , gdzie  $f(x)$  jest funkcją Gaussa:

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-x_r)^2} \quad (11)$$

Im większa jest wartość parametru  $h$ , nazywanego wskaźnikiem dokładności, tym pomiary leżą bliżej wartości rzeczywistej  $x_r$ . Widać to na wykresie przedstawionym na rys. 2, gdzie typowy dla funkcji Gaussa kształt dzwonowatej krzywej jest zwężony w poziomie i wyraźnie wyższy w centrum dla większej wartości  $h$ . Żeby uzyskać doświadczalne potwierdzenie poprawności rozkładu pomiarów, danego wzorem (11) i nazywanego rozkładem normalnym albo rozkładem Gaussa, należy wykonać możliwie dużo pomiarów. Jak pokazuje przykład 4, o jakościowej zgodności możemy mówić zestawiając wyniki aż 100 pomiarów, kiedy histogram doświadczalnych wartości  $f(x)$  zaczyna przebiegać w miarę blisko przez punkty wskazane przez krzywą teoretyczną. Oczywiście zgodność byłaby lepsza, gdyby ilość pomiarów była jeszcze większa.



Rys. 2. Wykres rozkładu Gaussa dla dużej serii pomiarów okresu wahań wahadła prostego o wartości rzeczywistej okresu  $T_r = 2,2$  s. (a) Wpływ wskaźnika dokładności  $h$  na kształt rozkładu. (b) Zasięg wartości  $\sigma$  i  $3\sigma$  dla odchylenia standardowego  $\sigma = 0,20$  s ( $h = 3,54$  s<sup>-1</sup>). Obszar zakreskowany zaznacza przedział  $(T_{sr} - \sigma, T_{sr} + \sigma)$ .

Miarą rozrzutu punktów pomiarowych wielkości  $x$  jest odchylenie standardowe  $\sigma_{xi}$  związane z  $h$  zależnością  $\sigma_{xi} = 1/\sqrt{2}h$ . Dla  $N$  pomiarów wielkości  $x$  ( $N \geq$  ok. 15), odchylenie standardowe oblicza się z zależności:

$$\sigma_{xi} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} (x_i - x_{sr})^2}{N-1}}, \quad (12)$$

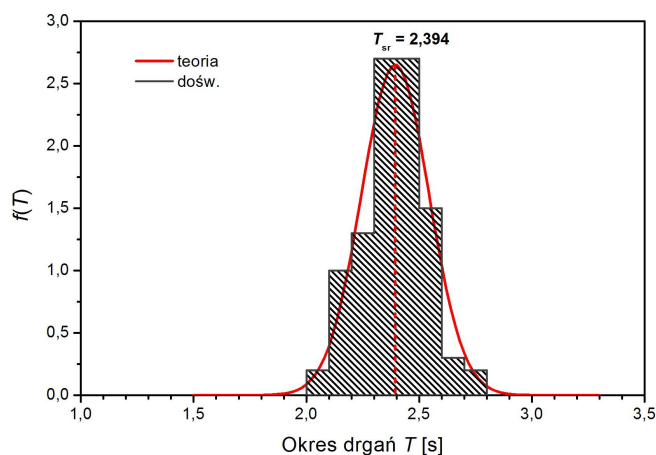
gdzie  $x_i$  oznacza  $i$ -ty wynik pomiaru, a  $x_{sr}$  ich średnią arytmetyczną. W przedziale  $\langle x_{sr} - \sigma_{xi}, x_{sr} + \sigma_{xi} \rangle$  (patrz: rys. 2b) leży około 68,3% wszystkich wyników pomiarów, natomiast w przedziale trzykrotnie większym, tzn. wewnątrz  $\langle x_{sr} - 3\sigma_{xi}, x_{sr} + 3\sigma_{xi} \rangle$  leży ich aż 99,7% (299 na 300 pomiarów), czyli w praktyce wszystkie wyniki poprawnie wykonanych pomiarów. Kryterium  $3\sigma$  mówi, że należy odrzucić jako błędnie wykonane te pomiary z dużej serii pomiarów, których wyniki różnią się o więcej niż  $3\sigma$  od wartości średniej. Niestety, kryterium to może zawodzić przy zbyt małej liczbie pomiarów np. dla  $N = 20$ , gdyż wtedy nawet jeden błędny pomiar, tzn. błąd grubo, ma znaczący wpływ na średnią i przesuując jej wartość powiększa szerokość przedziału  $3\sigma_{xi}$  tak, że obejmuje on też błędny wynik.

Żeby wygodnie i bezbłędnie wykonać obliczenia odchylenia standardowego i sprawdzić, czy spełnione jest kryterium  $3\sigma$ , warto wykorzystać dołączony arkusz kalkulacyjny [8]. Wypełniamy go, podając wszystkie wyniki pomiarów, przy czym możemy skorzystać z arkusza zaplanowanego na 20 lub 100 danych pomiarowych. W arkuszu obliczana jest: wartość średnia  $x_{sr}$ , odchylenie od wartości średniej (nazywane też residuum) dla poszczególnych pomiarów  $r_i = x_i - x_{sr}$ , jego kwadrat  $r_i^2$  i wypisywana jest suma tych kwadratów. Po podaniu liczby pomiarów, ze wzoru (12) obliczana jest wartość odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru  $\sigma_{xi}$  oraz  $3\sigma_{xi}$ . Sprawdzając poprawność pomiarów w kryterium  $3\sigma$ ,

obserwujemy, czy któreś z odchyłeń nie przekracza tej ostatniej wartości. Na końcu podane jest odchylenie standardowe wartości średniej  $\sigma_{x_{sr}}$  (w literaturze oznaczone często symbolem  $\sigma_m$ ) obliczane z zależności  $\sigma_{x_{sr}} = \sigma_{x_i} / \sqrt{N}$ , które należy podawać wraz z wynikiem pomiaru wielkości  $x$  w postaci:  $x = x_{sr} \pm \sigma_{x_{sr}}$ . Z tekstu opracowania powinno jednoznacznie wynikać, że liczba stojąca po znaku „ $\pm$ ” to odchylenie standardowe średniej i w przedziale  $\langle x_{sr} - \sigma_{x_{sr}}, x_{sr} + \sigma_{x_{sr}} \rangle$  należy spodziewać się wartości prawdziwej  $x_T$  z prawdopodobieństwem ok. 68%, a nie 100% jak to jest przy zapisie wartości maksymalnej niepewności pomiaru  $\Delta x_{sr}$ .

#### Przykład 4:

Dla pewnej długości wahadła prostego wykonano 100 pomiarów czasu trwania jednego okresu wahań przy pomocy stopera elektronicznego o dokładności odczytu 0,01 s. Najmniejsza wartość  $T_i$  w serii pomiarów to 2,00 s, największa 2,83 s, a wartość średnia  $T_{sr} = 2,394$  s. Odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru okresu  $\sigma_{T_i}$  wynosi 0,151 s, a wartość  $3\sigma_{T_i}$  jest równa 0,452 s. Kryterium  $3\sigma$  mówi, że wszystkie pomiary powinny leżeć w przedziale (1,942 s; 2,846 s), co jest spełnione dla każdego pomiaru z tej serii. W celu obliczenia rozkładu normalnego  $f(T)$  policzono, ile pomiarów  $T_i$  należy do kolejnych przedziałów wartości  $T$  o szerokości 0,1 s, np. do przedziału od 2,0 s do 2,1 s. Wyniki tej analizy przedstawia rys. 3 w postaci histogramu, na którym przedstawiono też teoretyczną zależność obliczoną ze wzoru (11), gdzie przyjęto, że  $x$  to  $T$ . Zgodność wartości doświadczalnych (pole zakreskowane) z teoretycznymi (czerwona linia ciągła) jest dobra, a byłaby jeszcze lepsza, gdyby zwiększyć znacznie liczbę pomiarów.



Rys. 3. (kolor czarny) Histogram dla serii 100 pomiarów okresu wahań wahadła prostego, dla których obliczona wartość średnia okresu  $T_{sr} = 2,394$  s i odchylenie standardowe  $\sigma_{T_i} = 0,151$  s. Dla porównania narysowano wykres rozkładu normalnego (kolor czerwony) uzyskany z teorii dla tych samych wartości  $\sigma_{T_i}$  i  $T_{sr}$ .

#### Przykład 5:

Arkusz kalkulacyjny o nazwie *Gauss\_KFS* [8] pozwala wygodnie obliczyć wartość odchylenia standardowego i znaleźć ewentualne błędy w danych pomiarowych stosując kryterium  $3\sigma$ . Dla zademonstrowania sposobu jego użycia, wprowadzono do niego wyniki pomiarów okresu wahań wahadła: arkusz *Gauss\_N20* dwudziestu pierwszych, a arkusz *Gauss\_N100* wszystkich stu wykonanych pomiarów. Wartość odchylenia standardowego  $\sigma_{T_i}$  dla dłuższej serii pomiarowej wynosi 0,151 s, a w przedziale o szerokości  $3\sigma_{T_i} = 0,452$  s wokół średniej, czyli w przedziale  $\langle 1,94$  s; 2,85 s), leżą wszystkie pomiary, przy czym najbardziej oddalony od średniej jest pomiar nr 25 o wartości  $T_{25} = 2,83$  s. Mimo sporego oddalenia należy taki pomiar uznać za poprawny i będący konsekwencją naturalnego rozrzutu statystycznego pomiarów. Gdyby jednak kierować się tylko wynikami krótszej serii pomiarów, prawidłowy wynik 2,83 s należałoby odrzucić jako błędny, gdyż tu akceptowalny przedział wartości okresu kończy się na 2,78 s.



Kryterium  $3\sigma$  może zawodzić, gdy jest zastosowane do zbyt małej ilości pomiarów, gdyż potrafi zaakceptować ewidentnie błędny pomiar (tzw. błąd grubo) wynikający z błędnego działania przyrządu, błędnego odczytu czy nieuwagi eksperymentatora. Na przykład, hipotetyczny błędny pomiar  $T = 1,80$  s byłby akceptowany w kryterium  $3\sigma$  w serii 20 pomiarów z przykładu 5, co można sprawdzić zastępując nim którąkolwiek z podanych wartości. Na szczęście, taka sama próba podjęta dla serii 100 pomiarów pozwala stwierdzić za każdym razem błąd w pomiarze. Oznacza to, że dłuższa seria pomiarowa daje większą dokładność wartości średniej i odchylenia standardowego, a przez to zwiększa pewność wnioskowania o poprawności konkretnego pomiaru.

## Obliczanie odchylenia standardowego pomiarów pośrednich

Gdy wielkość fizyczna  $W$  jest mierzona pośrednio poprzez obliczanie ze wzoru  $W(x, y, z)$  z wykorzystaniem wielokrotnych pomiarów bezpośrednich np. trzech wielkości fizycznych  $x, y$  i  $z$  charakteryzujących się rozkładem normalnym, mamy również do czynienia z rozrzutem normalnym tak otrzymanych wyników  $W_i$ . Uzyskanie wszystkich tych wartości wymagałoby zastosowania programu komputerowego, gdyż ilość obliczeń wartości  $W_i$  oznaczona  $N_w$  jest równa iloczynowi ilości pomiarów poszczególnych wielkości mierzonych bezpośrednio. Dla przykładu, dla trzech wielkości mierzonych  $N_w = N_x \cdot N_y \cdot N_z$  i wystarczy przyjąć niewygórowaną liczbę 20 pomiarów każdej zmiennej, tzn.  $N_x = N_y = N_z = 20$ , by uzyskać  $N_w$  równą aż 8000! Gdy zastosowanie wzoru (12) do obliczenia odchylenia standardowego dla pojedynczego pomiaru  $\sigma_{w_i}$  i wartości średniej  $\sigma_{w_{sr}}$  dla tak wielu wyników  $W_i$  jest niemożliwe, pozostaje metoda obliczenia odchylenia standardowego ze wzoru:

$$\sigma_{w_{sr}} = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 \sigma_{x_{sr}}^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 \sigma_{y_{sr}}^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 \sigma_{z_{sr}}^2} \quad (13)$$

podanego tu dla trzech wielkości  $x, y$  i  $z$ . Końcowy wynik pomiaru wielkości  $W$  należy podawać w postaci  $W = W(x_{sr}, y_{sr}, z_{sr}) \pm \sigma_{w_{sr}}$ .

W doświadczeniach laboratoryjnych rzadko mamy do czynienia z sytuacją, że występują tylko wielkości mierzone wielokrotnie, których rozrzut wyników typu rozkładu normalnego jest dużo większy od niepewności maksymalnej przyrządu. Występują bowiem często wielkości mierzone tylko jeden raz, gdyż każdy kolejny pomiar dałby ten sam wynik. Takie pomiary nie mają więc rozrzutu statystycznego, a jedynie rozrzut systematyczny związany z dokładnością przyrządu lub eksperymentatora, który można oszacować jedynie przez niepewność maksymalną. Gdyby taką wielkością była zmienna  $z$ , wtedy stosując wzór (13) należałoby, zamiast odchylenia standardowego, użyć wartości jej niepewności maksymalnej pomnożonej przez  $1/\sqrt{3}$ , czyli  $\sigma_{z_{sr}} = \Delta z / \sqrt{3}$ . Wartość mnożnika wynika z zastosowania wzoru (12) do zbioru potencjalnych wartości rzeczywistych  $z_i$ , które wypełniają równomiernie (rozkład jednorodny) przedział  $\langle z_m - \Delta z, z_m + \Delta z \rangle$  i które podczas pomiaru są kwalifikowane jako wartość zmierzona  $z_m$ .

### Przykład 6:

Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła różnicowego odbywa się poprzez zastosowanie wahadła prostego którego długość nici możemy zmieniać. Dokonujemy pomiaru okresu wahań  $T_1$  dla większej długości nici  $l_1$ , a następnie okresu  $T_2$  dla nici skróconej do długości  $l_2$ . Wartość przyspieszenia ziemskiego  $g$  obliczamy ze wzoru:

$$g = \frac{4\pi^2 \Delta l}{T_1^2 - T_2^2}, \quad (14)$$

przy czym skrócenie długości wahadła  $\Delta l = l_1 - l_2 = P_1 - P_2$ , gdzie  $P_1$  i  $P_2$  oznaczają pozycję/położenie na pionowej skali milimetrowej zacisku ograniczającego długość nici wahadła.

W celu możliwie dokładnego zmierzenia przyspieszenia ziemskiego, dokonano 50 pomiarów okresu  $T_1$  dla  $P_1 = 0,447$  m oraz 50 pomiarów  $T_2$  dla  $P_2 = 0,052$  m mierząc za każdym razem czas trwania pięciu wahań zamiast jednego, gdyż zwiększało to dokładność pomiaru okresu. Korzystając ze wzoru (14), przy pomocy specjalnie napisanego programu, obliczono 2500 wartości  $g$  dla każdej kombinacji  $T_1$  i  $T_2$ . (50x50 różnych par). Mając te wartości obliczono: wartość średnią  $g_{sr} = 9,790$  m/s<sup>2</sup>, odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru  $g$ , czyli  $\sigma_{g_i} = 0,88$  m/s<sup>2</sup>, oraz odchylenie standardowe wartości średniej

$\sigma_{g_{sr}} = 0,88 \text{ m/s}^2 / \sqrt{2500} = 0,018 \text{ m/s}^2$ . W tej sytuacji można podać wartość przyspieszenia ziemskiego w postaci  $g_{sr} = (9,79 \pm 0,018) \text{ m/s}^2$ . Uzyskana wartość przyspieszenia ziemskiego różni się o ok.  $1,2 \sigma_{g_{sr}}$  od wartości tablicowej  $g_{tab}$  dla Lublina wynoszącej  $9,8112 \text{ m/s}^2$  - zawiera więc wartość  $g_{tab}$  w przedziale  $3\sigma_{g_{sr}}$  i może być dlatego uznana za poprawnie zmierzona. Takie podejście ma jedną wadę – zakładamy, że niepewność pomiaru  $\Delta l$  jest na tyle mała, że nie ma istotnego wpływu na wynik obliczeń  $g$ . Niestety jest to trudno osiągnąć w pracowni.

Pozbawiony tej wady i prostszy technicznie sposób określenia wartości  $g$  opiera się na wykorzystaniu wzoru (14) do którego wstawiamy wartości średnie okresów wahań:  $T_{1\text{sr}} = 2,397 \text{ s}$  i  $T_{2\text{sr}} = 2,035 \text{ s}$ . Uzyskujemy w ten sposób wartość  $g_{sr} = 9,715 \text{ m/s}^2$ . Ocena niepewności pomiaru w tym przypadku wymaga zastosowania wzoru (13) dla dwóch wielkości mierzonych wielokrotnie:  $T_1$  oraz  $T_2$  oraz trzeciej wielkości  $\Delta l$  mierzony tylko raz. Po uproszczeniach uzyskujemy w ten sposób wzór:

$$\sigma_{g_{sr}} = \frac{4\pi^2 \Delta l}{T_{1\text{sr}}^2 - T_{2\text{sr}}^2} \sqrt{\left(\frac{2T_1 \sigma_{T_{1\text{sr}}}}{T_{1\text{sr}}^2 - T_{2\text{sr}}^2}\right)^2 \sigma_{T_{1\text{sr}}}^2 + \left(\frac{2T_2 \sigma_{T_{2\text{sr}}}}{T_{1\text{sr}}^2 - T_{2\text{sr}}^2}\right)^2 \sigma_{T_{2\text{sr}}}^2 + \left(\frac{\Delta(\Delta l)}{\sqrt{3}\Delta l}\right)^2} \quad (15)$$

Podstawiając do wzoru (15) wartości:  $\sigma_{T_{1\text{sr}}} = 0,0035 \text{ s}$ ,  $\sigma_{T_{2\text{sr}}} = 0,0027 \text{ s}$  i  $\Delta(\Delta l) = 0,002 \text{ m}$  otrzymujemy wynik  $\sigma_{g_{sr}} = 0,122 \text{ m/s}^2$ . Wynik końcowy  $g_{sr} = (9,72 \pm 0,13) \text{ m/s}^2$  jest tu nieco mniej dokładny niż uzyskany powyżej innym sposobem, ale wartość tablicowa  $g_{tab}$  zawiera się tu już nawet w przedziale o szerokości  $\sigma_{g_{sr}}$ .

### III. Aproksymacja liniowa danych pomiarowych metodą najmniejszych kwadratów

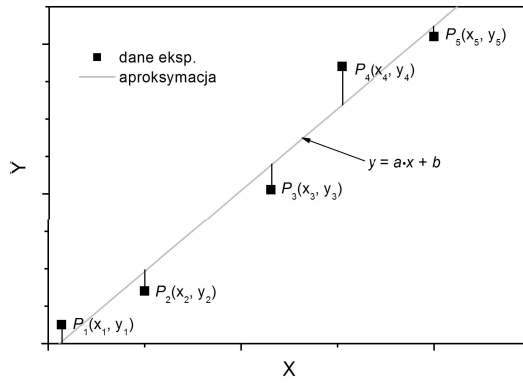
Często spotykanym zadaniem w analizie danych doświadczalnych jest wykonanie wykresu zależności jednej wielkości fizycznej od drugiej, np.  $y$  od  $x$ , gdyż rysunek pozwala łatwiej dostrzec charakter tej zależności i zgodność teorii z doświadczeniem. Na przykład, może to być wykres zależności drogi hamowania samochodu od jego prędkości początkowej czy oporu elektrycznego przewodnika od jego temperatury. Na profesjonalnie wykonanym wykresie powinny zostać zaznaczone punkty pomiarowe oraz przebiegająca optymalnie między nimi gładka krzywa, najlepiej wynikająca z rozważań teoretycznych. Często spotykanym błędem, którego należy unikać, jest poprowadzenie krzywej łamanej poprzez łączenie kolejnych punktów. Żeby znaleźć optymalną krzywą, której przebieg określa funkcja liniowa, potęgowa, wielomianowa czy eksponencjalna, wystarczy skorzystać z arkusza *Excel*. W przypadku bardziej skomplikowanych funkcji, konieczne jest skorzystanie ze specjalnych programów do sporządzania wykresów naukowych jak np. *Origin* lub do analizy danych np. *Statistica*. Możemy jednak takie obliczenia wykonać samodzielnie i stosunkowo łatwo, gdy zależność między wielkościami  $y$  i  $x$  jest liniowa, czyli opisana równaniem

$$y = a \cdot x + b \quad , \quad (16)$$

gdzie wielkości  $a$  i  $b$  są współczynnikami regresji (aproksymacji) liniowej.

Szczególnie proste są obliczenia w przypadku klasycznej regresji liniowej, tzn. gdy poszczególne punkty  $P_i(x_i, y_i)$  reprezentują wyniki pojedynczego pomiaru i nie musimy obliczać ich odchylenia standardowego. Zakładamy wtedy, że znaczenie lub ściślej waga każdego punktu w obliczeniach jest jednakowa i wynosi 1. Algorytm obliczania współczynników  $a$  i  $b$  dla  $N$  punktów na wykresie wynika z minimalizacji parametru  $S$ , będącego sumą kwadratów różnicy (patrz rys. 4) współrzędnej  $y_i$  każdego z punktów i jego aproksymowanej wartości  $\hat{y}_i = ax_i + b$  obliczonej z równania linii prostej:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{i=N} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{i=N} [y_i - (ax_i + b)]^2 \quad . \quad (17)$$



Rys. 4. Oddalenie w pionie  $N$  punktów pomiarowych (tu  $N = 5$ ) od linii prostej aproksymującej te dane.

Celem obliczeń jest znalezienie takich optymalnych wartości  $a$  i  $b$ , aby parametr  $S$  przyjmował wartość minimalną. Stąd pochodzi też nazwa - **metoda najmniejszych kwadratów (MNK)**. Z matematycznego punktu widzenia oznacza to, że pochodne cząstkowe po  $a$  i  $b$  dla tych wartości powinny zerować się, czyli  $\partial S / \partial a = 0$  i  $\partial S / \partial b = 0$ . Po obliczeniu pochodnych cząstkowych równania (17) uzyskuje się układ równań:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=N} 2(y_i - ax_i - b) \cdot (-x_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{i=N} 2(y_i - ax_i - b) \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

Da się go zapisać w postaci układu równań liniowych:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^{i=N} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{i=N} x_i = \sum_{i=1}^{i=N} x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^{i=N} x_i + b \sum_{i=1}^{i=N} 1 = \sum_{i=1}^{i=N} y_i \end{cases}, \quad (18)$$

gdzie niewiadomymi są  $a$  i  $b$ , a współczynnikami równania są poszczególne sumy. Rozwiązanie układu równań (18) można uzyskać poprzez obliczenie wyznaczników równania i poszczególnych niewiadomych:

$$W = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{i=N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{i=N} x_i \\ \sum_{i=1}^{i=N} x_i & N \end{vmatrix}, \quad W_a = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{i=N} x_i y_i & \sum_{i=1}^{i=N} x_i \\ \sum_{i=1}^{i=N} y_i & N \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad W_b = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{i=N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{i=N} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{i=N} x_i & \sum_{i=1}^{i=N} y_i \end{vmatrix}. \quad (19a-c)$$

Rozwiązaniem układu równań (18) są  $a$  i  $b$  o wartości:

$$\begin{cases} a = W_a / W \\ b = W_b / W \end{cases}. \quad (20)$$

Znając już optymalne wartości współczynników  $a$  i  $b$ , można narysować linię prostą  $y = a \cdot x + b$  aproksymującą punkty pomiarowe  $P_i(x_i, y_i)$ . W tym celu obliczamy z równania (16) wartość  $y$  dla dwóch różnych argumentów  $x$ , najlepiej na początku i końcu przedziału zmienności, by przez tak otrzymane dwa punkty poprowadzić linię prostą. Przykład takiego wykresu jest pokazany na rysunku 4, który przedstawia zależność momentu siły niezbędnej do skręcenia pręta o dany kąt. Jak widać linia aproksymująca nie przechodzi przez każdy z punktów (uniemożliwia to rozrzut wartości pomiarów), ale przechodzi między punktami, pozostawiając dwa z nich wyraźnie wyżej, dwa niżej, a reszta punktów leży blisko prostej. Taki przebieg prostej upewnia nas, że obliczenia zostały wykonane poprawnie. Gdyby narysowana prosta aproksymująca biegła wyraźnie poza obszarem danych doświadczalnych lub pod innym kątem do osi  $X$ , oznaczałoby to, że popełniliśmy błąd w obliczeniach  $a$  i  $b$  lub podczas rysowania prostej.

Stopień odchylenia punktów doświadczalnych od aproksymującej linii prostej ma wpływ na niepewność

uzyskanych wartości współczynników  $a$  i  $b$  – im jest on większy tym wartości odchylenia standardowego  $\sigma_a$  i  $\sigma_b$  są większe. Obliczenie ich wartości umożliwiają dwa poniższe wzory:

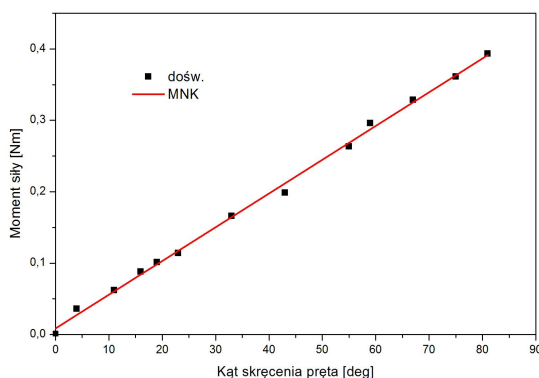
$$\sigma_a = \sqrt{\frac{N \sum_{i=1}^{i=N} (y_i - ax_i - b)^2}{(N-2) \cdot W}} \quad \sigma_b = \sqrt{\frac{\left( \sum_{i=1}^{i=N} x_i^2 \right) \sum_{i=1}^{i=N} (y_i - ax_i - b)^2}{(N-2) \cdot W}} \quad (21a, b)$$

Dopasowanie linii prostej do punktów pomiarowych na wykresie ocenia się też w profesjonalnych opracowaniach wyników podając jedną liczbę - *współczynnik determinacji* oznaczony  $R^2$  i zdefiniowany następująco  $\frac{\sum_{i=1}^{i=N} (y_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{i=N} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}$ , gdzie  $\bar{y}$  jest wartością średnią współrzędnych  $y$  punktów. Parametr  $R^2$  przyjmuje wartość z przedziału (0; 1), przy czym im jego wartość jest bliższa jedności, tym stopień dopasowania funkcji aproksymującej do danych doświadczalnych jest lepszy.

#### Przykład 7:

W celu zademonstrowania metody najmniejszych kwadratów dokonano analizy wyników doświadczenia polegającego na skręceniu naprężonego druta mosiężnego pod wpływem momentu siły przyłożonego do jednego z jego końców. Moment siły był dobrze mierzalny, gdyż jest równy iloczynowi ciężaru szalki o masie 27,1 g obciążanej dodatkowo ciężarkami o maksymalnej masie 275 g i ramienia działania tej siły o wartości  $R = 13,25$  cm. Kąt skręcenia był mierzony z dokładnością do  $1^\circ$  względem początkowego położenia. W programie *MNK\_KFS.xls* [9] w arkuszu o nazwie *MNK-pret* jako zmienna  $x$  podany jest kąt skręcenia, a jako zmienna  $y$  wartość momentu siły powodującego takie skręcenie. W wierszu 16 podane są wartości sum niezbędne do obliczenia wyznaczników ze wzorów (19a-c), wartości  $a$  i  $b$  ze wzoru (20) oraz ich niepewności ze wzoru (21a,b).

Dla takiego wykresu tangens kąta nachylenia uzyskanej linii prostej, równy współczynnikowi  $a$ , jest tożsamy z momentem kierującym pręta  $D$ . Zgodnie z wynikami z arkusza, wynosi on 0,00473 Nm/deg, czyli 0,271 Nm/rad. Niepewność pomiaru  $\Delta D = \Delta a = 6,85 \cdot 10^{-5}$  Nm/deg, co stanowi zaledwie 1,4% wartości  $D$ . Pomiar  $D$  jest więc dość dokładny, co wynika ze starannego wykonania pomiarów i zastosowania metody najmniejszych kwadratów. Gdyby natomiast obliczać moment kierujący dla kolejnych punktów pomiarowych, przyjmując pierwszy punkt  $P(0 \text{ Nm}; 0 \text{ rad})$  jako punkt odniesienia, to wartości  $D$  zmieniałyby się w szerokim przedziale od 0,0090 Nm/deg do 0,0048 Nm/deg, a więc byłyby znacznie mniej dokładne.



Rys. 5. Wykres danych pomiarowych i linii prostej aproksymującej te dane, uzyskanej metodą najmniejszych kwadratów, dla pręta mosiężnego poddanego działaniu skrętnego momentu siły.

## IV. Literatura i materiały pomocnicze

- [1] J. Arendarski, *Niepewność pomiarów*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Lubelskiej, Warszawa 2013.
- [2] A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2013.
- [3] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błęd pomiarowego*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995.

- [4] G. L. Squires, *Praktyczna fizyka*, (Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1992).
- [5] H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna*, (Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1997).
- [6] H. Szydłowski, *Teoria pomiarów*, (Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1981).
- [7] A. Zięba, *Dwadzieścia lat konferencji GUM oceny niepewności pomiaru. II Wybrane zagadnienia*, Postępy Fizyki, tom 68, zeszyt 1, 2017 r.
- [8] W. Polak, *Gauss\_KFS.xls*, arkusz kalkulacyjny w Excelu do obliczania odchylenia standardowego i sprawdzania kryterium  $3\sigma$ , [www.kfs.pollub.pl](http://www.kfs.pollub.pl).
- [9] W. Polak, *MNK\_KFS.xls*, arkusz kalkulacyjny w Excelu do obliczania metodą najmniejszych kwadratów parametrów aproksymującej linii prostej i ich niepewności, [www.kfs.pollub.pl](http://www.kfs.pollub.pl).

Opracował: Wiesław Polak