Ćw. 31. Pomiary oporów i pojemności

Wprowadzenie

Prąd elektryczny

Jeżeli w przewodniku na jego końcach którego występuje różnica potencjałów to mówimy wówczas, że na końce przewodnika przyłożone jest napięcie. Prądem elektrycznym nazywamy uporządkowany ruch naładowanych cząstek. Prąd może płynąć w przewodnikach (metale), w półprzewodnikach, a także w cieczach (elektrolitach) i gazach. Ograniczmy się do prądu w przewodnikach. W metalach jedynymi naładowanymi cząsteczkami, które mogą się poruszać są elektrony. Ale elektrony poruszają się zawsze, ale to nie oznacza, że zawsze w przewodnikach płynie prąd. Jeżeli przez przewodnik nie płynie prąd, to kierunek ruchu elektronów jest dowolny i przypadkowy. Ale sumaryczny ruch wszystkich elektronów jest zerowy. Oznacza to, że statystycznie tyle samo elektronów porusza się w prawo, co w lewo. Jeżeli jednak na końce przewodnika przyłożone jest napięcie, to więcej elektronów poruszać będzie się w stronę dodatniego potencjału, niż w stronę potencjału ujemnego. Oczywiście nie wszystkie elektrony się poruszają. Część z nich, te najbliżej jąder atomowych, są na trwale związane z atomem. Ale atomy, które znajdują się daleko od jąder są raczej słabo z nimi związane. To właśnie ich uporządkowany ruch nazywamy prądem elektrycznym. Elektrony poruszają się zawsze w stronę potencjału dodatniego. Jednak kiedy nauka o tych zjawiskach jeszcze raczkowała i nie wiedziano, że prąd elektryczny wywołany jest przepływem elektronów właśnie w tym kierunku przyjęto, że prąd płynie z potencjału dodatniego do ujemnego. I tak już zostało. Mimo iż elektrony płyną w przeciwnym kierunku, to oznacza się, że prąd płynie od "plusa" do "minusa".
Wielkością charakteryzującą prąd jest **natężenie prądu**, zdefiniowane jako stosunek ładunku **q**, jaki przejdzie przez dowolny przekrój przewodnika w ciągu czasu **t**, do tego czasu:

$$I = \frac{q}{t}$$

Jednostką natężenia prądu jest jeden **amper (1A)** i jest ona jednostką podstawową układu SI.

Prawo Ohma

Przykładając napięcie na końce przewodnika, spowodujemy w nim przepływ prądu, którego natężenie jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia:

$$I = \frac{U}{R}$$

Wielkość **R** nazywamy oporem omowym przewodnika, a jednostką oporu jest **om (1Ω)**

Zależność oporu od cech przewodnika

Gdy na końcach przewodnika nie jest przyłożone napięcie, a na tym przewodniku znajduje się ładunek, to powierzchnia tego przewodnika jest powierzchnią ekwipotencjalną. Ale jeżeli przez przewodnik płynie prąd (przyłożone jest napięcie) to powierzchnia przewodnika nie jest już powierzchnią ekwipotencjalną. Okazuje się jednak, że przekrój poprzeczny przewodnika jest powierzchnią, na której każdy punkt ma równy potencjał. Jeżeli przewodnik jest jednorodny i o jednorodnym przekroju, to okazuje się, że na dwóch powierzchniach, na których potencjał jest różny, różnica potencjału jest proporcjonalna do odległości od końca przewodnika. Można wnioskować, że opór między końcem przewodnika a jego dowolnym przekrojem jest proporcjonalny do spadku potencjału (czyli do długości przewodnika). Okazuje się, że opór przewodnika jest odwrotnie proporcjonalny do pola przekroju przewodnika. Uwzględniając powyższe własności możemy zapisać:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{s}$$

gdzie **l** to długość przewodnika, **s** to pole przekroju, natomiast **ρ** jest **opornością właściwą** danego materiału (opór przewodnika o długości 1m i powierzchni $1m^2$).

Prawo Ohma

Wszystkie znane dotąd materiały przewodzące prąd mają pewien opór. Źródło napięcia zbudowane z takich materiałów, ma także swój własny opór, zwany **oporem wewnętrznym**. Na schematach opór wewnętrzny oznacza się jako zewnętrzny opornik umieszczony obok źródła. Każde źródło charakteryzuje się różnicą potencjałów na jego zaciskach. zwaną **siłą elektromotoryczną** (SEM).

$$R_z + R_w = \frac{\varepsilon}{I}$$

gdzie $\mathbf{R_z}$ - to opór układu, $\mathbf{R_w}$ - to opór wewnętrzny źródła, **I** - prąd płynący w obwodzie, **E** - SEM.

$$\varepsilon = IR_z + IR_w$$
$$\varepsilon = U + IR_w$$

gdzie **U** to jest napięcie użyteczne w obwodzie - napięcie na oporze zewnętrznym.
Po przekształceniu wzoru na SEM:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_z + R_w}$$

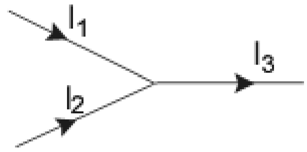
możemy sformułować **prawo Ohma dla obwodu**:

Natężenie prądu w obwodzie jest wprost proporcjonalne do SEM, a odwrotnie proporcjonalne do sumy oporu zewnętrznego i oporu wewnętrznego.

Prawa Kirchhoffa

Pierwsze prawo Kirchhoffa

Rozpatrzmy węzeł sieci (punkt, w którym spotykają się przewodniki). Niech do węzła dołączone są trzy przewodniki. W dwóch z nich niech wpływa do węzła prąd **I_1** oraz **I_2**, a trzecim przewodnikiem niech z tego węzła odpływa prąd o natężeniu **I_3**. Naszym zadaniem jest wyznaczyć, czy istnieje związek między natężeniami prądów wpływającymi do węzła, a natężeniem prądu "odpływającego".



Prąd to jak wiemy uporządkowany ruch elektronów. Elektrony wpływające do węzła nie mogą z niego uciec inną drogą niż przewodnik. Mówi o tym zasada zachowania ładunku. Ile prądu "wpłynie" do węzła, tyle z niego musi "wypłynąć". Zatem:

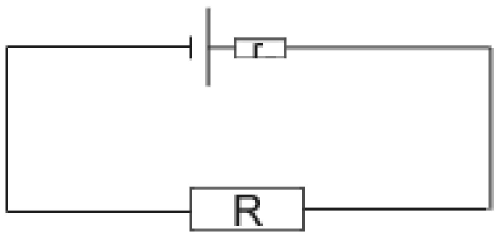
$$I_1 + I_2 = I_3$$
$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

W ostatnim wzorze n oznacza liczbę gałęzi doprowadzonych do węzła (w naszym przykładzie 3).

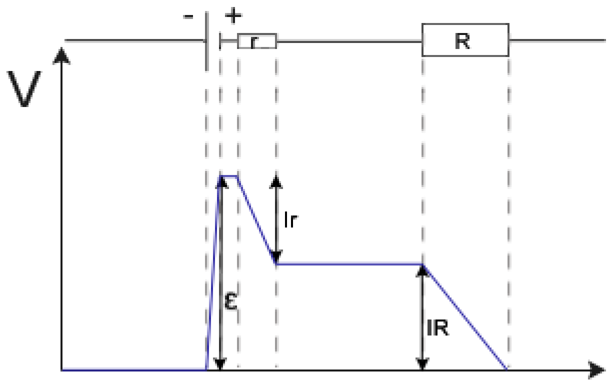
Pierwsze prawo Kirchhoffa możemy zatem sformułować następująco: algebraiczna suma wszystkich prądów dopływających i odpływających do węzła jest równa zeru.

Drugie prawo Kirchhoffa

Rozpatrzmy obwód złożony z dwóch oporów r i R i źródła prądu:



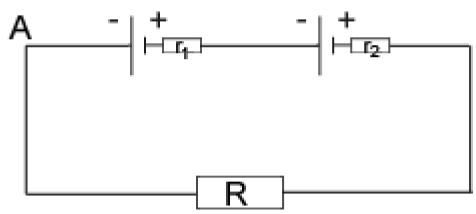
Rozpatrzmy rozkład potencjału w tym obwodzie. W tym celu umieśćmy wszystkie jego elementy w jednej linii.

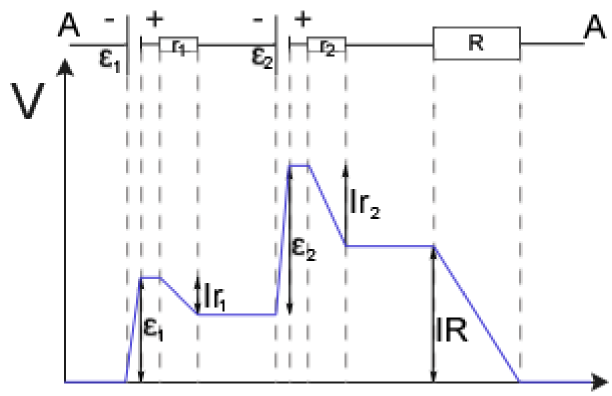


Siła elektromotoryczna takiego układu wynosi:

$$\varepsilon = Ir + IR$$

Zastosujmy powyższe rozważanie dla bardziej skomplikowanego układu:





Z rysunku wynika, iż:

$$\varepsilon_1 - Ir_1 + \varepsilon_2 - Ir_2 - IR = 0$$
$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = Ir_1 + Ir_2 + IR$$

W powyższym obwodzie wyróżnić możemy **oczko obwodu** czyli zamkniętą część obwodu lub pojedynczy obwód zamknięty. Oczko „obchodzimy" dookoła. Jeśli „przechodzimy" siłę elektromotoryczną od minusa do plusa, to we wzorze piszemy +ε , jak odwrotnie to -ε. Jeśli "spotykamy" opór i "mijamy" go pod prąd, to piszemy z plusem, a jeśli z prądem to z minusem.

Na podstawie powyższych przypadków możemy sformułować drugie prawo Kirchhoffa: Suma algebraiczna wszystkich napięć i wszystkich sił elektromotorycznych w oczku obwodu jest równa zero.

Prawo Joule'a-Lenza

Prąd, który płynie przez opór wykonuje pracę. Praca ta zamieniana jest na ciepło. W jakiej ilości to ciepło zostanie wydzielone mówi nam prawo Joule'a-Lenza, dlatego czasami mówimy o **cieple Joule'a-Lenza**. Praca przy przenoszeniu ładunku dodatniego przez prąd o natężeniu **I** przez opór w czasie **t**:

$$W = q \cdot U$$

U - to napięcie przyłożone do opornika.

$$q = I \cdot t$$

$$W = I \cdot U \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t$$

Praca zamienia się na ciepło i wzory te wyrażają ilość ciepła wydzielającego się na oporniku:

$$q = \frac{U^2}{R} \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t = I \cdot U \cdot t$$

Pojemność elektryczna

Doświadczenia pokazują, że takie wielkości jak dostarczony ładunek na przewodnik i potencjał tego przewodnika są wielkościami proporcjonalnymi. Oznacza to, że stosunek: q/V jest dla przewodnika wielkością charakterystyczną. Oznaczono tę wielkość jako pojemność elektryczna danego przewodnika. Wielkość tę oznaczamy symbolem **C**, a jednostką pojemności jest **farad (kulomb/wolt)**.

$$C = \frac{q}{U}$$

Jeden farad to pojemność takiego przewodnika, którego potencjał wynosi 1 wolt po naładowaniu go ładunkiem 1 kulomba.
Ze wzoru mogłoby wynikać, że pojemność przewodnika zależy od przyłożonego ładunku lub od potencjału tego ładunku. Jednak jak było to wspomniane te wielkości są proporcjonalne i pojemność na zależy od innego czynnika. Tym czynnikiem jest wielkość przewodnika. Łatwo to sobie wyobrazić, bo większe przewodniki mają większa pojemność elektryczną.

Kondensator

Pojęcie pojemności przewodnika nie jest wykorzystywane w przypadku pojedynczych przewodników, raczej w układach przewodników. Takim układem przewodników jest **kondensator**. Tworzą go dwa przewodniki o różnych kształtach i wymiarach. Przewodniki te nazywamy okładkami kondensatora. Okładki ładują się takim samym ładunkiem, ale o różnych znakach. Bardzo ważną wielkością w kondensatorze jest różnica potencjałów tych przewodników. Tę różnicę potencjałów nazywamy napięciem. Różnica potencjałów jest tym większa im większy ładunek naniesiemy na jeden z przewodników. Stosunek tego ładunku do napięcia kondensatora jest stały i nazywa się go **pojemnością kondensatora**.

$$C = \frac{q}{U}$$

Także w tym przypadku jednostką pojemności jest **farad**.

Naładowany kondensator ma energię potencjalną. Aby obliczyć jej wartość musimy wyznaczyć pracę potrzebną do naładowania kondensatora. Skorzystajmy ze wzoru:

$$W = q \cdot U$$

Podczas ładowania kondensatora napięcie na okładkach zmienia się. Więc chcąc użyć ten wzór musimy zastosować średnie napięcie. Skorzystamy z następujących faktów. Wiemy, że przed naładowaniem kondensatora napięcie na jego okładkach równe jest zero, a po naładowaniu wynosi **U**. Napięcie zmienia się z powodu dostarczanego ładunku. Wiadomo, że napięcie i ładunek są wielkościami proporcjonalnymi (wykresem zależności napięcia od ładunku jest linia prosta). Dlatego szukając średniego napięcia przy ładowaniu kondensatora, możemy skorzystać ze średniej arytmetycznej:

$$U_{sr} = \frac{0+U}{2} = \frac{1}{2}U$$

Podstawiając do wzoru na pracę:

$$W = q \cdot U_{sr} = \frac{qU}{2}$$

Jest to więc praca, jaką należy wykonać by naładować kondensator, więc tyle też wynosi energia potencjalna naładowanego kondensatora:

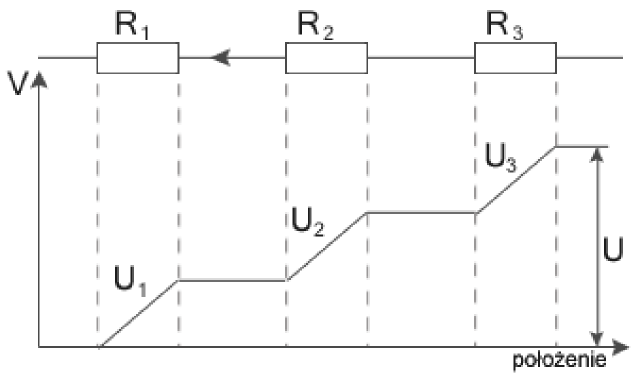
$$E = \frac{qU}{2}$$

Kondensatory podobnie jak opory możemy ze sobą łączyć. Omówimy tu dwa sposoby łączenia: szeregowe i równoległe oraz sprawdzimy ile w tych przypadkach wynosi zastępcza pojemność układu. Mówiąc inaczej jest to pojemność takiego kondensatora, którym moglibyśmy zastąpić ten układ i nie wywołać przy tym zmiany pojemności.

Szeregowe i równoległe łączenie oporów i pojemności

Kilka oporników połączonych ze sobą tworzą układ. Cały układ zawsze możemy zastąpić jednym opornikiem i ta zmiana nie będzie miała, żadnego wpływu na cały obwód (opór układu będzie równy temu opornikowi). Opór całego układu nazywamy **oporem zastępczym**. W zależności od sposobu połączenia oporników ze sobą w inny sposób liczymy opór zastępczy układu.

Szeregowe łączenie oporów



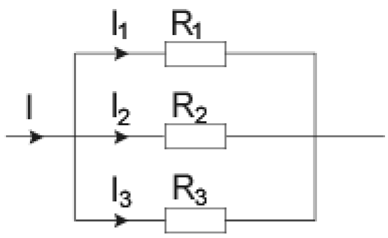
Jeżeli oporniki połączymy szeregowo, to przez każdy opornik przepłynie taki sam prąd o natężeniu I, a suma spadków napięć na każdym oporniku, będzie równa napięciu na końcach układu oporników. Zatem:

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$
$$IR_z = IR_1 + IR_2 + IR_3$$
$$R_z = R_1 + R_2 + R_3$$

Opór zastępczy oporników połączonych szeregowo równy jest sumie poszczególnych oporów.

Łatwo zauważyć, że tak opór zastępczy tak połączonych oporników jest zawsze większy od największego oporu, który wchodzi w skład układu.

Równoległe łączenie oporów



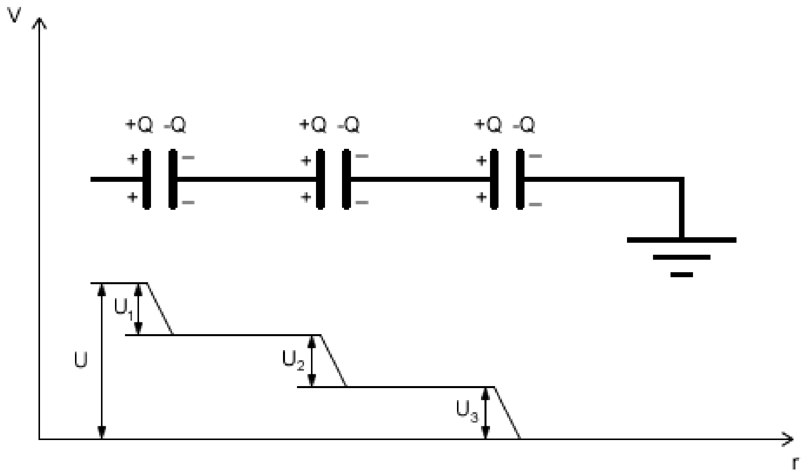
W tak połączonych opornikach napięcia na każdym z nich są równe, a z pierwszego prawa Kirchhoffa wiemy, że:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$
$$\frac{U}{R_z} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}$$
$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Odwrotność oporu zastępczego układu oporników połączonych równolegle jest równa sumie odwrotności poszczególnych oporów. W tym przypadku opór zastępczy układu jest zawsze mniejszy od najmniejszego oporu wchodzącego w skład układu.

Szeregowe łączenie pojemności

Połączmy trzy kondensatory w sposób szeregowy. Niech ich pojemności wynoszą odpowiednio $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$ i $\mathbf{C_3}$. Jeden koniec układu naelektryzujmy dodatnio a do drugiego podepnijmy uziemienie. Pierwsza okładka na pierwszym kondensatorze naładowana jest przez nas dodatnio ładunkiem **+Q**. Pod wpływem indukcji druga okładka tego kondensatora elektryzuje się ujemnie ładunkiem ujemnym ale o takiej samej wartości: **-Q**. Ale kiedy elektryzuje się ujemnie pobiera elektrony z pierwszej okładki drugiego kondensatora, który w konsekwencji naładowany jest dodatnio ładunkiem **+Q**. Druga okładka drugiego kondensatora ładuje się przez indukcję ładunkiem **-Q**. Następne kondensatory ładują się analogicznie jak poprzednie. Zawsze jednak na ich okładkach powstają ładunki **+Q** lub **-Q**. Więc przyjmujemy, że ładunek dostarczony do każdego kondensatora wynosi **Q**.



Wyliczmy ile wynosi pojemność każdego kondensatora:

$$C_1 = \frac{Q}{U_1}, \quad C_2 = \frac{Q}{U_2}, \quad C_3 = \frac{Q}{U_3}$$

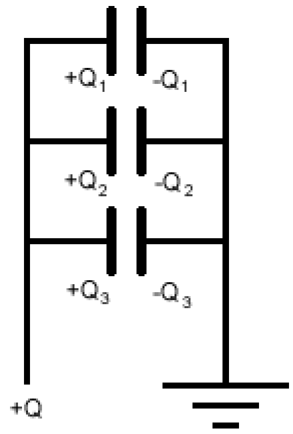
Spójrzmy teraz na wykres zależności potencjału od długości przewodnika. Na jednym końcu wynosi on **U** (ten koniec, na który naniesiony był ładunek). Drugi koniec układu jest uziemiony, a wszystko co jest uziemione ma potencjał równy zero. Widzimy, że spadki potencjału mają miejsce na kondensatorach i spadki te są równe napięciu, jakie występuje na okładkach kondensatora. Na wykresie widać że napięcie całego układu (różnica potencjałów przewodnika przed pierwszym kondensatorem i przewodnika uziemionego) jest równa sumie napięć wszystkich kondensatorów. Wyliczmy zatem te napięcia na każdym kondensatorze i wyliczmy ich sumę:

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$
$$\frac{Q}{C_z} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3}$$
$$\frac{1}{C_z} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Odwrotność pojemności zastępczej układu kondensatorów połączonych szeregowo jest równa sumie odwrotności poszczególnych pojemności składowych. W tym przypadku pojemność zastępcza układu połączonego szeregowo jest zawsze mniejsza od najmniejszej pojemności łączonych kondensatorów

Równoległe łączenie pojemności

Połączmy teraz trzy kondensatory w sposób równoległy. Niech każdy z nich ma pojemność równą odpowiednio $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$ i $\mathbf{C_3}$. Tak jak poprzednio niech jeden koniec układu zostanie naładowany dodatnio, a drugi niech będzie uziemiony. Mamy do czynienia z następującą sytuacją: na kondensatorze pierwszym znajduje się ładunek $\mathbf{Q_1}$, na kondensatorze drugim – ładunek $\mathbf{Q_2}$, a na trzecim - $\mathbf{Q_3}$. Ale na wszystkich kondensatorach mam identyczne napięcie, bo wszystkie lewe (dostosuj rysunek do opisu - okładki po lewej stronie mają być naładowane dodatnio) okładki są połączone przewodnikiem, więc mają wszystkie równy potencjał **U**. Natomiast prawe okładki są uziemione, więc ich potencjał równy jest zero.



Ładunek naniesiony na lewą stronę układu rozmieścił się po okładkach. Suma ładunków na poszczególnych kondensatorach równa jest ładunkowi dostarczonemu przez nas (ładunek całkowity).

$$C_1 = \frac{Q_1}{U}, \quad C_2 = \frac{Q_2}{U}, \quad C_3 = \frac{Q_3}{U}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$C_z U = C_1 U + C_2 U + C_3 U$$

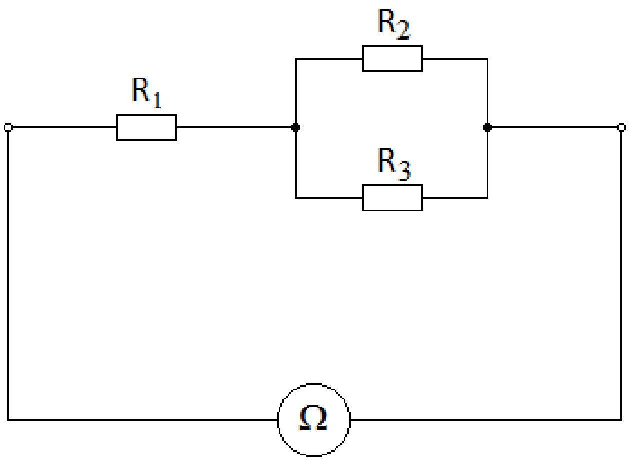
$$C_z = C_1 + C_2 + C_3$$

Ostatni wzór mówi nam jak liczy się pojemność układu kondensatorów połączonych równolegle. Pojemność zastępcza tak połączonych kondensatorów jest równa sumie poszczególnych pojemności. Łatwo zauważyć, że tak pojemność zastępcza tak połączonych pojemności jest zawsze większa od największej pojemności, która wchodzi w skład układu.

Wykonanie ćwiczenia

Łączenie oporów.

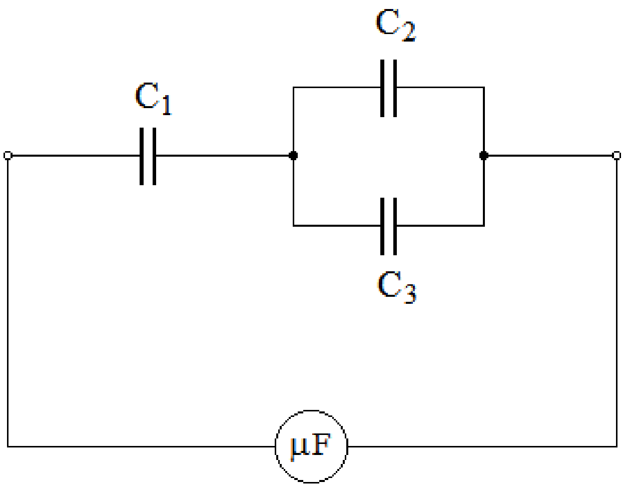
1. Zmierzyć opór rezystorów za pomocą omomierza.
2. Połączyć obwód elektryczny wg poniższego schematu lub schematu zaproponowanego przez prowadzącego.



3. Zmierzyć omomierzem opór zastępczy R_{zm}.
4. Porównać wynik R_{zm} zmierzone z R_{zo} obliczone z wzoru na opór zastępczy.

Łączenie pojemności.

1. Zmierzyć pojemności za pomocą miernika pojemności.
2. Połączyć obwód elektryczny wg poniższego schematu lub schematu zaproponowanego przez prowadzącego.



3. Zmierzyć miernikiem pojemności pojemność zastępczą C_{zm}.
4. Porównać wynik C_{zm} zmierzone z C_{zo} obliczone z wzoru na pojemność zastępczą.

Obowiązujące zagadnienia teoretyczne

1. Prawo Ohma
2. Prawa Kirchhoffa
3. Prawo Joule'a-Lenza
4. Pojemność elektryczna
5. Szeregowe i równoległe łączenie oporów i pojemności

Literatura

1. Podstawy Fizyki – D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, PWN 2003, tom 3.
2. Fizyka-krótki kurs – Cz. Bobrowski, PWN 1999.
3. Elektryczność i magnetyzm – A.H. Piekara, PWN 1970.

Opiekun ćwiczenia: dr Adam Prószyński